Approximation diophantienne et flots sur l'espace des réseaux

Emmanuel Breuillard

Au cours des quinze dernières années s'est développée en approximation diophantienne une nouvelle approche basée sur l'étude de l'action de certains groupes de transformations linéaires sur l'espace Ω des réseaux de $\mathbb{R}^n$. Cette nouvelle méthode permet de traduire le problème diophantien considéré en termes emprunts à la théorie des systèmes dynamiques. Ainsi elle met à profit les techniques propres à la théorie des systèmes dynamiques et à la théorie ergodique (classification des orbites fermées, des mesures invariantes, mélange, entropie, etc), ce qui enrichit considérablement les outils à notre disposition pour s'attaquer aux problèmes. Pour ne citer que les cas les plus célèbres où cette approche s'est révélée fructueuse pour résoudre des problèmes diophantiens, nous mentionerons la conjecture d'Oppenheim sur les valeurs entières des formes quadratiques réelles, résolue par cette approche par G. Margulis en 1986 [2], les conjectures de Baker-Sprinzuk sur l'approximation diophantienne sur les variétés, résolues par D. Kleinbock et G. Margulis en 1998 [4], ou encore la fameuse *conjecture de Littlewood*, toujours ouverte, mais qui apparaît désormais comme une conséquence d'une conjecture de G. Margulis sur la classification des mesures invariantes par le groupe diagonal sur l'espace Ω, voir [3]. Nous choisirons dans ce cours de mettre l'accent sur cette dernière conjecture. Nous expliquerons notamment les derniers développements la concernant et en particulier les travaux de Einsiedler, Katok et Lindenstrauss [1]. Ceux-ci donnent des résultats partiels allant dans le sens de la conjecture de Littlewood. En classifiant les mesures invariantes d'entropie positive, ils démontrent un cas particulier de la conjecture de Margulis et en déduisent que l'ensemble des exceptions possibles à la conjecture de Littlewood est de dimension de Hausdorff nulle.

Programme prévisonnel :

1ère séance : Dynamique sur l'espace des réseaux. Ergodicité. Récurrence des flots unipotents. Théorème de Ratner.

2ème séance : Conjecture d'Oppenheim. Approximation diophantienne sur les variétés, lois de Khintchine. Conjecture de Baker-Sprinzuk.

3ème séance : La conjecture de Littlewood. Flots diagonaux et conjecture de Margulis.

4ème séance : Entropie positive. Mesures conditonnelles et rigidité des mesures invariantes selon [1].

Articles originaux :

[1] Einsiedler, M; Katok, A; Lindenstrauss, E. Invariant measures and the set of exceptions to Littlewoods conjecture, à paraître dans Annals of Math.

[2] Margulis, G.A. Formes quadratiques indéfinies et flots unipotents sur les espaces homogènes, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 304 (1987), no. 10, 249–253.

[3] Margulis, G.A, Problems and conjectures in Rigidity Theory. in Mathematics: Frontiers and Perspectives, 161–174, Amer. Math. Soc. (2000).

[4] Kleinbock, D. Y.; Margulis, G. A, Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds. Ann. of Math. (2) 148 (1998), no. 1, 339–360.

Survols :

[5] Kleinbock, D.; Shah, N.; Starkov, A. Dynamics of subgroup actions on homogeneous spaces of Lie groups and applications to number theory. Handbook of dynamical systems, Vol. 1A, 813–930, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[6] Starkov, Alexander N. Dynamical systems on homogeneous spaces. Translations of Mathematical Monographs, 190. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. 243pp.

[7] Witte, D. Ratner's theorem on unipotent flows, Chicago Lecture Notes in Mathematics, University of Chicago Press, 2005.

[8] Ratner, M. Interactions between ergodic theory, Lie groups, and number theory. Proceedings of the ICM, Vol 1,2, Zurich 1994, 257–182, Birkhauser, 1995.

[9] Bekka, B. ; Mayer, M. Ergodic theory and topological dynamics of group actions on homogeneous spaces. London Mathematical Society Lecture Note Series, 269. Cambridge University Press, 2000. 200 pp.

[10] Margulis, G. Diophantine approximation, lattices and flows on homogeneous spaces. A panorama of number theory or the view from Baker's garden (Zurich, 1999), 280–310, Cambridge Univ. Press, 2002.