**La conjecture des premiers jumeaux pour les courbes elliptiques**

Chantal David (Université Concordia, Montréal)

La conjecture des premiers jumeaux affirme qu'il existe une infinité de premiers $p$ tels que $p+2$ est aussi premier. Hardy et Littlewood ont conjecturé en 1933 que

$$\#\{p \leq x : p+2 \text{ est premier}\} \sim \mathfrak{S} \frac{x}{\log^2 x},$$

où

$$\mathfrak{S} = 2 \prod_{\ell \neq 2} \frac{\ell(\ell-2)}{(\ell-1)^2}.$$

En 1988, Neil Koblitz a formulé une conjecture similaire pour les courbes elliptiques: soit $E$ une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$, et soit

$$\pi_E^{\text{jumeau}}(x) = \#\left\{p \leq x \ : \ N_p(E) = p + 1 - a_p(E) \ \text{ est premier}\right\}.$$

Koblitz conjecture que

$$\pi_E^{\text{jumeau}}(x) \sim C_E \ \frac{x}{\log^2 x},$$

où $C_E$ est une constante donnée explicitement dans la conjecture, et ne dépendant que de la courbe $E$.

Cette conjecture est encore une question ouverte, et on ne connait pas d'exemple de courbe (sans multiplication complexe) telle que $\pi_E^{\text{jumeau}}(x)$ n'est pas borné. Nous expliquons dans cet exposé quel est l'heuristique derrière la conjecture de Koblitz, et comment la constante $C_E$ est reliée aux propriétés des extensions galoisiennes données par les points de torsion de $E$. Nous présentons aussi un résultat qui montre que la conjecture est vraie en moyenne (sur toutes les courbes $E$ dans un certain ensemble).

Ces travaux sont en collaboration avec A. Balog (Institut Alfred-Renyi, Budapest) et Alina Cojocaru (Université de l'Illinois à Chicago).