Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2008/2009
Master 1 — Logique et théorie des ensembles

Théorie des ensembles
Corrigé de l'exercice VI feuille 2.

1. Si κ est un cardinal fini alors κ a un plus grand élément, ce qui entraîne immédiatement que κ est régulier. Si $\kappa = \aleph_0$, alors tout sous-ensemble a de κ de cardinal strictement inférieur à κ est fini, et par conséquent $\sup(a)$ est un ordinal fini, donc $\sup(a) < \kappa$.
Par définition, on a $\aleph_\omega = \sup\{\aleph_i : i < \omega\}$. Par conséquent il existe une partie $a \subseteq \aleph_\omega$ de cardinal $\aleph_0 < \aleph_\omega$ et telle que $\sup(a) = \aleph_\omega$. Ceci montre que $\aleph_\omega$ n'est pas régulier.
2. Fixons un ordinal α. Il est clair d'après la définition que α est cofinal à α ; par conséquent, l'ensemble $\{\beta \le \alpha : \alpha \text{ est cofinal à } \beta\}$ est non vide, et a donc un plus petit élément β_0. Pour tout ordinal β tel que α soit cofinal à β, on a alors que $\beta > \alpha$ (et alors $\beta > \beta_0$) ou $\beta \le \alpha$ et alors la définition de β_0 assure que $\beta \ge \beta_0$. Autrement dit, β_0 est le plus petit ordinal tel que α soit cofinal à β.
3. Soit α un ordinal et $\beta = \mathrm{cof}(\alpha)$. Si β n'est pas un cardinal, alors il existe un cardinal $\lambda < \beta$ et une bijection $f : \lambda \to \beta$. Bien sûr, f n'est pas strictement croissante (sauf si $\beta = \lambda$). Par contre, on peut utiliser f pour définir une fonction strictement croissante et d'image non majorée, définie sur un segment initial de λ et à valeurs dans β. Bien sûr, ceci contredit la définition de β (en composant les fonctions...), donc il nous suffit d'expliquer comment obtenir cette fonction.
Pour tout $\gamma < \lambda$, posons

$$h(\gamma) = \begin{cases} f(0) & \text{si } \gamma = 0 \\ \min(\{\delta \le \beta : f(\gamma) \le \delta \text{ et } \forall \xi < \gamma \; h(\xi) < \delta\} & \text{si } \gamma \text{ est successeur} \\ \sup(\{h(\delta) : \delta < \gamma\} \cup \{f(\gamma)\}) & \text{si } \gamma \text{ est limite} \end{cases} .$$

Alors h est croissante, $h(\gamma) \in \beta \cup \{\beta\}$ pour tout $\gamma < \kappa$, et

$$I = \{\gamma < \kappa : h(\gamma) < \beta\}$$

est un segment initial de κ sur lequel h est stricement croissante. D'autre part, puisque $h(\gamma) \ge f(\gamma)$ pour tout $\gamma < \kappa$, on voit que $\sup(h(I)) = \sup(h(\kappa)) = \beta$. Finalement, notons que I, en tant que sous-ensemble d'un ensemble bien ordonné, est bien ordonné par l'ordre induit.
On vient donc d'obtenir une fonction strictment croissante et d'image non bornée de γ dans β pour un certain $\gamma < \beta$, et donc on a trouvé un ordinal $< \beta$ auquel α soit cofinal, ce qui contredit la définition de β.
4. On en déduit immédiatement que si $\alpha = \mathrm{cof}(\alpha)$ alors α est un cardinal.
5. Un ordinal α est de cofinalité 1 si et seulement si il existe une fonction f de $1 = \{0\}$ dans α telle que $\{f(0)\}$ ne soit pas strictement majoré dans α ; autrement dit un ordinal α est de cofinalité 1 si et seulement si α a un plus grand élément, c'est-à-dire si et seulement si α est un ordinal successeur.
6. Soit β un ordinal auquel $\mathrm{cof}(\alpha)$ soit cofinal, et soit $f : \beta \to \mathrm{cof}(\alpha)$ une fonction strictement croissante et d'image non strictement majorée. On a par définition une fonction $g : \mathrm{cof}(\alpha) \to \alpha$ strictement croissante et d'image non strictement majorée, par conséquent $g \circ f$ est une fonction strictement croissante et non strictement majorée de β dans α. On vient de montrer que si $\mathrm{cof}(\alpha)$ est cofinal à β, alors α est cofinal à β. Par conséquent,

$$\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(\alpha)) \ge \mathrm{cof}(\alpha) .$$

L'inégalité réciproque est claire, puisque $\mathrm{cof}(\alpha) \le \alpha$ pour tout ordinal α. On en déduit que pour tout ordinal α on a

$$\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(\alpha)) = \mathrm{cof}(\alpha) .$$

7. Soit λ un cardinal infini et régulier. Pour tout $\beta < \lambda$ et toute fonction strictement croissante de β dans λ, on a que le cardinal de $f(\beta)$ est inférieur à β, donc strictement inférieur à λ, et par conséquent

$$\sup(\{f(\gamma) : \gamma < \beta\}) < \lambda .$$

Ceci montre que λ n'est cofinal à aucun $\beta < \lambda$ et donc $\mathrm{cof}(\lambda) = \lambda$.
Réciproquement, soit λ un ordinal infini vérifiant $\mathrm{cof}(\lambda) = \lambda$. On sait que λ est en fait un cardinal ; soit a un sous-ensemble de λ de cardinal strictement inférieur à λ. Alors a, muni de la relation induite par la restriction à a de la relation $\in$ (le bon ordre sur λ) est un ensemble bien ordonné, isomorphe à un certain ordinal $\alpha < \lambda$; il existe donc une bijection strictement croissante de α sur a. Puisque $\mathrm{cof}(\lambda) = \lambda$ et $\alpha < \lambda$, l'image de cette application doit être strictement majorée, ce qui montre que $\sup(a) \in \lambda$ et donc que λ est un cardinal régulier.