Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2008/2009
Master 1 — Logique et théorie des ensembles

Théorie des ensembles
Feuille 1.

I. *Jouons avec les axiomes.*
A l'aide des axiomes d'extensionnalité et d'existence, justifier qu'il existe un unique ensemble vide.

II. *Quelques remarques élémentaires sur les ordinaux.*
Démontrer les assertions suivantes :
1) Un ordinal α est un entier naturel si, et seulement si, tout sous-ensemble non vide de α a un plus grand élément.
2) Si X est un ensemble d'ordinaux, alors $\cap X$ est un ordinal. De plus $\cap X$ est le plus petit élément de X.
3) Tout ensemble non vide d'ordinaux admet une borne supérieure (comment décrire explicitement celle-ci ?).
4) Montrer que si A est une partie d'un ordinal α, alors la relation d'appartenance définit sur A une relation de bon ordre, qui est isomorphe à un ordinal plus petit que α.

III. *Puissances ordinales.* On a défini en cours l'opération sur les ordinaux $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha^\beta$ de la façon suivante :
– $\alpha^0 = 1$
– $\alpha^{\lambda+1} = \alpha^\lambda.\alpha$
– Si λ est limite, $\alpha^\lambda = \sup\{\alpha^\xi : \xi < \lambda\}$
1) Pourquoi cette définition est-elle légale ?
2) Montrer que si α et β sont dénombrables alors α^β est aussi dénombrable [1]
3) Prouver que pour tout triplet d'ordinaux α, β, γ on a $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta.\alpha^\gamma$.
4) Prouver qu'il existe un ordinal dénombrable ξ tel que $\xi = \omega^\xi$. Existe-t-il un ordinal tel que $\xi = \xi^\omega$?

IV. *Dérivation de Hausdorff.*
Soit $(x, \leq)$ un ensemble muni d'un ordre total $\leq$. Si $x, y \in X$ on note $[x, y] = \{z \in X : x \leq z \leq y\}$ et on définit une relation d'équivalence $\sim$ sur X en posant

$$(x \sim y) \Leftrightarrow ([x, y] \text{ est fini}) .$$

1) Montrer que l'ordre $\leq$ passe au quotient par $\sim$, c'est-à dire que si $x \sim x'$, $y \sim y'$ sont des éléments de X tels que $x \not\sim y$ alors

$$(x \leq y) \Leftrightarrow (x' \leq y')$$

2) Montrer que si $(X, <)$ est bien ordonné alors $D(X)$ est bien ordonné.
3) Soit $(X, \leq)$ un ensemble bien ordonné dénombrable. On a envie de réitérer l'opération décrite au point 1 ; pour ce faire, définissons nos notations : si $\sim$ est une relation d'équivalence compatible avec $\leq$ alors on note $[x]_\sim$ la $\sim$-classe de X ; et si de plus $\sim$ est compatible avec $\leq$ alors on note $D(\sim)$ la relation d'équivalence obtenue en posant

$$xD(\sim)y \Leftrightarrow \text{ il y a un nombre fini de } \sim\text{-classes entre} [x]_\sim \text{ et } [y]_\sim .$$

On montre comme au point 1 que $D(\sim)$ est encore une relation d'équivalence compatible avec $\leq$.
Expliciter une construction par récurrence transfinie qui, partant de la relation triviale $\sim_0$ (c'est-à-dire $x \sim_0 y$ ssi $x = y$), permette de répéter l'opération D et ainsi de définir, pour tout ordinal $\alpha < \omega_1$ [2] , une relation d'équivalence $\sim_\alpha$ compatible avec $\sim$. Aux ordinaux limite on utilisera la réunion des relations d'équivalence précédemment construites.

[1] en particulier, α^β ne correspond PAS à l'ensemble des fonctions de β dans α : ça, c'est le produit de *cardinaux*.
[2] ω_1 désigne le plus petit ordinal non dénombrable, c'est-à-dire l'ordinal de Hartogs de ω.

Pour nous simplifier la vie, notons $D_\alpha(X)$ l'ensemble ordonné obtenu en passant $\leq$ au quotient par $\sim_\alpha$.
4) Montrer que, pour tout ordinal dénombrable α, $D_\alpha(\omega^\alpha)$ est un singleton.

V. *Une opération sur les ordinaux.*
1) Montrer que l'on peut définir une opération $\ominus$ sur les ordinaux telle que pour tous les ordinaux α, β on ait :
- $\alpha \ominus \beta = 0$ si $\alpha < \beta$
- $\beta + (\alpha \ominus \beta) = \alpha$ si $\alpha \geq \beta$.

Donner un exemple d'ordinaux $\alpha > \beta$ tels qu'il n'existe pas d'ordinal γ tel que $\gamma + \beta = \alpha$.
2) Soient α et β deux ordinaux avec $\beta \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique couple d'ordinaux (γ, δ) tel que $\alpha = \beta \cdot \gamma + \delta$ et $\delta < \beta$.
(Indication : on pourra d'abord montrer qu'il existe γ' tel que $\alpha < \beta \cdot \gamma'$ et que le plus petit tel γ' est successeur).

VI. *Une autre définition de la somme ordinale.*
Soit I un ensemble ordonné par une relation d'ordre $<_I$, et $(\alpha_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles ordonnés ; on note $<_{\alpha_i}$ la relation d'ordre sur α_i.
On définit l'union disjointe $\sqcup_{i \in I} \alpha_i$ de la famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ par $\sqcup \alpha_i = \cup_{i \in I} \alpha_i \times \{i\}$. Puis on munit cet ensemble de l'ordre lexicographique : $(a, i) < (b, j)$ si et seulement si $\big(i <_I j$ ou $i = j$ et $a <_{\alpha_i} b\big)$.
1) Montrer que cela définit bien une relation d'ordre sur $\sqcup_{i \in I} \alpha_i$.
2) Montrer que si $<_I$ est un bon ordre, ainsi que tous les ordres $<_{\alpha_i}$, alors l'ordre construit est également un bon ordre.
Dans le cas où $(\alpha_i)_{i \in I}$ est une famille d'ordinaux, et où I est un ordinal, on appelle *somme ordinale* de la famille $(\alpha_i)_{i \in I}$, et on note $\sum_{i \in I} \alpha_i$, l'unique ordinal isomorphe au bon ordre ainsi construit. Si $I = 2$, on le note $\alpha_0 + \alpha_1$.
3)Montrer que l'addition ordinale est associative, non commutative, que 0 est élément neutre et que, pour tout ordinal α, $\alpha + 1$ est l'ordinal successeur $\alpha \cup \{\alpha\}$ de α.
4) Montrer la monotonie à droite, i.e $\beta < \beta' \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \beta'$
En déduire la régularité à gauche, i.e $\alpha + \beta = \alpha + \beta' \Rightarrow \beta = \beta'$.
Enfin, montrer que la somme ordinale n'est pas monotone à gauche (au sens strict) ni régulière à droite, mais qu'on a : $\alpha \leq \alpha' \Rightarrow \alpha + \beta \leq \alpha' + \beta$.
5) Montrer que la somme est la seule opération binaire sur les ordinaux vérifiant :
$\alpha + 0 = \alpha$; $\alpha + s(\beta) = s(\alpha + \beta)$ (s est la fonction successeur) ;
$\alpha + \beta = \sup_{\gamma < \beta}(\alpha + \gamma)$ si β est un ordinal limite.
Pouvez-vous proposer une définition du produit d'ordinaux similaire à celle de cet exercice ?