Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2008/2009
Master 1 — Logique et théorie des ensembles

Théorie des ensembles
Feuille 3.

Dans toute cette feuille on suppose que l'axiome du choix est vrai.
Rappelons qu'on a défini dans la feuille d'exercices précédente un cardinal régulier comme un cardinal κ tel que pour tout sous-ensemble $a \subset \kappa$ de cardinal strictement inférieur à κ on ait $\sup(a) \in \kappa$. Ainsi, la question (1) de l'exercice II ci-dessous correspond au lemme 3.3.1 des notes de cours.

I. *Retour sur la cofinalité.*
Soit α un ordinal. Montrer que $\mathrm{cof}(\alpha)$ est le plus petit ordinal γ tel qu'il existe une fonction $f\colon \gamma \to \alpha$ dont l'image ne soit pas strictement majorée.

II. *Cofinalité et cardinaux réguliers.*
(1) Montrer qu'un cardinal κ est régulier si, et seulement si, pour tout $\lambda < \kappa$ et toute famille $(X_\alpha)_{\alpha\in\lambda}$ d'ensembles tels que $|X_\alpha| < \kappa$ pour tout $\alpha < \lambda$, on a $|\cup X_\alpha| < \kappa$.
(2) Soit κ un cardinal ; montrer que $\mathrm{cof}(\kappa)$ est le plus petit ordinal γ tel que α soit la réunion de γ ensembles de cardinal strictement inférieur à $\kappa|$.
(3) Montrer que tout cardinal successeur est régulier.
(4) Quelle est la cofinalité de $\aleph_{\omega+\omega}$? Plus généralement, si $\alpha > \omega$ est un ordinal, quelle est la cofinalité de $\aleph_\alpha$?
(5) On appelle *faiblement inaccessible* un cardinal non dénombrable à la fois limite et régulier. Montrer qu'un tel cardinal α doit vérifier $\alpha = \aleph_\alpha$. La réciproque est-elle vraie ?
Commentaire. Dans ZFC on ne peut ni démontrer, ni réfuter, l'existence de cardinaux faiblement inaccessibles : c'est un exemple d'énoncé *indécidable.*

III. *Lemme de König.*
Soient $(\kappa_i)_{i\in I}$ et $(\lambda_i)_{i\in I}$ deux familles de cardinaux. On veut prouver que

$$\big(\forall i\ \kappa_i < \lambda_i\big) \Rightarrow \sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i$$

(1) Commencer par prouver que l'inégalité large est vraie.
(2) On veut montrer par l'absurde que l'inégalité est stricte. Supposons que ce n'est pas le cas ; alors, en utilisant la définition des opérations arithmétiques cardinales, on peut trouver deux familles d'ensembles $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ telles que :
- $|A_i| = \lambda_i$,
- $B_i \subset \prod_{j\in I} A_j$, $|B_i| = \kappa_i$, et
- $\cup_{i\in I} B_i = \prod A_i$.

En repensant à la preuve du théorème de Cantor, obtenir une contradiction.

IV. *Cofinalité de l'ensemble des parties de κ.*
(1) En utilisant le lemme de König, montrer que pour tout cardinal κ on a $\mathrm{cof}(2^\kappa) > \kappa$.
(2) En déduire une restriction à la négation de l'hypothèse du continu.