Université Claude Bernard Lyon I
Master 1

2nd semestre 2008/2009
Logique et théorie des ensembles

Théorie des ensembles
Feuille 3.

Dans toute cette feuille on suppose que l'axiome du choix est vrai.
Rappelons qu'on a défini dans la feuille d'exercices précédente un cardinal régulier comme un cardinal κ tel que pour tout sous-ensemble $a \subset \kappa$ de cardinal strictement inférieur à κ on ait $\sup(a) \in \kappa$. Ainsi, la question (1) de l'exercice II ci-dessous correspond au lemme 3.3.1 des notes de cours.

I. Soit α un ordinal. Montrer que $\mathrm{cof}(\alpha)$ est le plus petit ordinal γ tel qu'il existe une fonction $f: \gamma \to \alpha$ dont l'image ne soit pas strictement majorée.

Correction.
Définissons temporairemant, pour tout ordinal α, $A(\alpha)$ comme le plus petit ordinal γ tel qu'il existe une fonction $f: \gamma \to \alpha$ dont l'image ne soit pas strictement majorée dans α. Il est facile de se convaincre que $A(\alpha)$ est bien défini, et que $A(\alpha) \leq \mathrm{cof}(\alpha)$.
Il nous suffit donc de montrer l'inégalité réciproque ; soit une fonction $f: A(\alpha) \to \alpha$ d'image non strictement majorée dans α. On peut définir par récurrence transfinie une nouvelle fonction $g: A(\alpha) \to \alpha \cup \{\alpha\}$ en posant

$$g(\beta) = \begin{cases} f(\gamma) & \text{où } \gamma = \min\{\delta: \forall \xi < \beta \ f(\delta) > g(\xi)\} \text{ si cet ensemble est non vide} \\ \alpha & \text{sinon} \end{cases}$$

(En particulier on pose $g(0) = f(0)$ - attention à la zérologie...)
Alors cette fonction est croissante ; de plus, on ne peut avoir $g(\beta) = g(\beta')$ que si $g(\beta) = g(\beta') = \alpha$. Si l'on appelle θ le plus petit élément de $A(\alpha)$ tel que $g(\theta) = \alpha$, alors $g_{|_\theta}: \theta \to \alpha$ est strictement croissante, et de plus son image n'est pas strictement majorée dans α. Par conséquent $\theta \geq \mathrm{cof}(\alpha)$, et finalement $A(\alpha) \geq \theta \geq \mathrm{cof}(\alpha)$, ce dont on déduit bien que $A(\alpha) = \mathrm{cof}(\alpha)$ pour tout ordinal α.

II. *Cofinalité et cardinaux réguliers.*
(1) Montrer qu'un cardinal κ est régulier si, et seulement si, pour tout $\lambda < \kappa$ et toute famille $(X_\alpha)_{\alpha \in \lambda}$ d'ensembles tels que $|X_\alpha| < \kappa$ pour tout $\alpha < \lambda$, on a $|\cup X_\alpha| < \kappa$.
(2) Soit κ un cardinal ; montrer que $\mathrm{cof}(\kappa)$ est le plus petit ordinal γ tel que α soit la réunion de γ ensembles de cardinal strictement inférieur à κ.
(3) Montrer que tout cardinal successeur est régulier.
(4) Quelle est la cofinalité de $\aleph_{\omega+\omega}$? Plus généralement, si $\alpha > \omega$ est un ordinal, quelle est la cofinalité de $\aleph_\alpha$?
(5) On appelle *faiblement inaccessible* un cardinal non dénombrable à la fois limite et régulier. Montrer qu'un tel cardinal α doit vérifier $\alpha = \aleph_\alpha$. La réciproque est-elle vraie ?
Commentaire. Dans ZFC on ne peut ni démontrer, ni réfuter, l'existence de cardinaux faiblement inaccessibles : c'est un exemple d'énoncé *indécidable*.

Correction.
(1) Supposons que κ a la propriété énoncée au point (1), et soit $a \subset \kappa$ de cardinal $\lambda < \kappa$. Fixons une bijection $f: \lambda \to a$, puis pour tout $\alpha < \lambda$ posons

$$X_\alpha = \{\xi \in a: \xi < f(\alpha)\}$$

Chaque X_α est un segment initial strict de κ, par conséquent $|X_\alpha| < \kappa$; par hypothèse on a donc $|\cup X_\alpha| < \kappa$. Puisque $\bigcup X_\alpha$ est un segment initial de κ (c'est une réunion de segments initiaux) ceci impose que $\sup(\bigcup X_\alpha) <$

κ, et comme $a \subseteq \bigcup X_\alpha$ on en déduit $\sup(a) < \kappa$.
Supposons maintenant que κ est un cardinal régulier au sens défini dans la feuille d'exercices 2, et considérons un cardinal $\lambda < \kappa$ et une famille $(X_\alpha)_{\alpha\in\lambda}$ d'ensembles tels que $|X_\alpha| < \kappa$ pour tout $\alpha < \lambda$. Par récurrence transfinie, on peut construire une suite de sous-ensembles de κ deux à deux disjoints $(Y_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ tels que $|X_\alpha| = |Y_\alpha|$ pour tout $\alpha < \lambda$ (il est essentiel pour cette construction que $\lambda < \kappa$).
Alors on peut considérer la fonction $f\colon \lambda \to \kappa$ définie par $f(\alpha) = \sup(Y_\alpha)$. Comme $\lambda < \kappa$ et κ est régulier, l'image de f a un majorant dans κ ; autrement dit, il existe $\beta < \kappa$ tel que

$$\gamma \in \bigcup_{\alpha<\lambda} Y_\alpha \Rightarrow \gamma \leq \beta \ .$$

En particulier, on en déduit que $|\bigcup Y_\alpha| \leq |\beta| < \kappa$, et donc

$$\left|\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha\right| \leq \left|\bigcup_{\alpha<\lambda} Y_\alpha\right| < \kappa \ .$$

(2) Soit γ un ordinal tel que κ soit la réunion de γ ensembles $(X_\xi)_{\xi<\gamma}$ de cardinal strictement inférieur à κ ; pour tout $\xi < \gamma$ on peut poser $f(\xi) = \sup(X_\xi) < \kappa$. Par définition, l'image de γ par f ne peut être strictement majorée dans κ, ce qui prouve que $\gamma \geq \mathrm{cof}(\kappa)$.
Soit maintenant $\gamma = \mathrm{cof}(\kappa)$, et $f\colon \gamma \to \kappa$ une fonction d'image non strictement majorée dans κ. Alors, si l'on pose, pour $\alpha < \gamma$, $X_\alpha = \{\xi \in \kappa\colon \xi \leq f(\alpha)\}$, on a que X_α est un segement initial strict du cardinal κ, et donc $|X_\alpha| < \kappa$; de plus, le fait que l'image de f ne soit par strictement majorée impose que $\kappa = \bigcup X_\alpha$.
(3) Supposons que κ est un cardinal successeur, i.e $\kappa = \lambda^+$ pour un certain cardinal λ (c'est-à-dire que κ est le plus petit cardinal strictement supérieur à λ ; c'est un bon exercice de vérifier que cette définition équivaut à celle des notes de cours). Soit alors $\gamma = \mathrm{cof}(\alpha)$; c'est un cardinal tel qu'il existe des ensembles (X_ξ) de cardinal strictement inférieur à κ (donc inférieur ou égal à λ) et tels que

$$\kappa = \bigcup_{\xi<\gamma} X_\xi \ .$$

On déduit du cours que

$$\kappa = \left|\bigcup_{\xi<\gamma} X_\xi\right| \leq \sum_{\xi<\gamma} |X_\xi| \leq \sum_{\xi<\gamma} \lambda = \gamma.\lambda = \max(\gamma, \lambda)$$

On en déduit que $\kappa \leq \gamma$, ce qu'il fallait démontrer.
(4) Il est clair que $\aleph_{\omega+\omega}$ n'est pas successeur (c'est la limite d'une suite strictement croissante de cardinaux) par conséquent $\mathrm{cof}(\aleph_{\omega+\omega}) \geq \omega$; réciproquement, on déduit de l'égalité

$$\aleph_{\omega+\omega} = \bigcup_{n<\omega} \aleph_{\omega+n}$$

que $\mathrm{cof}(\aleph_{\omega+\omega}) = \omega$.
On a vu que tout cardinal successeur est régulier, donc d'après l'exercice sur la cofinalité de la deuxième feuille d'exercices on a $\mathrm{cof}(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha$ si α est successeur. Si α est limite, alors c'est un bon exercice (normalement pas trop difficile si vous vous inspirez du cas $\alpha = \omega + \omega$) de montrer que $\mathrm{cof}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cof}(\alpha)$ dans ce cas.
(5) Soit α un cardinal à la fois limite et régulier. On a $\alpha = \aleph_\beta$ pour un certain ordinal limite β, et les propriétés de la fonction $\beta \mapsto \aleph_\beta$ imposent que $\beta \leq \alpha$. D'après la question (4), on a $\mathrm{cof}(\alpha) = \mathrm{cof}(\aleph_\beta) = \mathrm{cof}(\beta)$; puisque α est régulier on doit avoir (d'après un exercice de la feuille 2) $\alpha = \mathrm{cof}(\alpha)$, et donc $\mathrm{cof}(\beta) = \alpha$; puisque $\mathrm{cof}(\beta) \leq \beta \leq \alpha$, ceci n'est possible que si $\alpha = \beta$ et donc $\alpha = \aleph_\alpha$.

III.*Lemme de König.*
Soient $(\kappa_i)_{i\in I}$ et $(\lambda_i)_{i\in I}$ deux familles de cardinaux. On veut prouver que

$$\left(\forall i \ \kappa_i < \lambda_i\right) \Rightarrow \sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i$$

(1) Commencer par prouver que l'inégalité large est vraie.
(2) On veut montrer par l'absurde que l'inégalité est stricte. Supposons que ce n'est pas le cas ; alors, en utilisant la définition des opérations arithmétiques cardinales, on peut trouver deux familles d'ensembles $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ telles que :
• $|A_i| = \lambda_i$,
• $B_i \subset \prod_{j\in I} A_j$, $|B_i| = \kappa_i$, et
• $\cup_{i\in I} B_i = \prod A_i$.
En repensant à la preuve du théorème de Cantor, obtenir une contradiction.

Correction.
(1) Revenons à la définition des opérations arithmétiques cardinales : fixons deux familles $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_i)_{i\in I}$ d'ensembles deux à deux disjoints tels que $|X_i| = \kappa_i$ et $|Y_i| = \lambda_i$. Puisque $\kappa_i < \lambda_i$, on sait à la fois qu'il existe une injection f_i de X_i dans Y_i et que chaque Y_i est non vide, par conséquent $\prod Y_i$ est non vide aussi [1].
Puisqu'on a $|X_i| < |Y_i|$ pour tout i, il existe pour tout i un élément $a_i \in Y_i \setminus f_i(X_i)$, et on peut considérer $(a_i)_{i\in I} \in \prod Y_i$. Maintenant, nous sommes équipés pour définir une injection g de $\bigcup X_i$ dans $\prod Y_i$: si $x \in \bigcup X_i$ on note i_x l'unique élément de I tel que $x \in X_{i_x}$, puis on pose, pour tout $i \in I$,

$$g(x)(i) = \begin{cases} f_i(x) & \text{si } i = i_x \\ a_i & \text{sinon} \end{cases} .$$

Vérifier que g est une injection est laissé en exercice (essentiellement pour vérifier que vous avez bien compris la définition de g !)
Puisqu'on vient de construire une injection de $\bigcup X_i$ dans $\prod Y_i$, on a prouvé que

$$\sum_{i\in I} \kappa_i \leq \prod_{i\in I} \lambda_i .$$

(2) Considérons la projection π_i sur la i-ième coordonnée de B_i dans A_i ; puisque $|\pi_i(B_i)| < |A_i|$, il existe $x_i \in Y_i \setminus \pi_i(B_i)$. L'axiome du choix nous autorise alors à considérer l'élément $(x_i) \in \prod_{i\in I} Y_i$, et pour tout i on a $\pi_i(x) = x_i \notin \pi_i(B_i)$, ce qui entraîne que $x \notin B_i$ pour tout $i \in I$, et contredit le fait que $\cup_{i\in I} B_i = \prod A_i$.

IV. *Cofinalité de l'ensemble des parties de κ.*
(1) En utilisant le lemme de König, montrer que pour tout cardinal κ on a $\mathrm{cof}(2^\kappa) > \kappa$.
(2) En déduire une restriction à la négation de l'hypothèse du continu.

Correction.
(1) Si κ est fini il n'y a rien à démontrer ; sinon, considérons 2^κ et $\rho = \mathrm{cof}(2^\kappa)$; on sait qu'il existe une fonction strictement croissante $f\colon \rho \to 2^\kappa$ d'image non majorée dans 2^κ. Pour tout $\alpha < \rho$ on peut poser comme d'habitude $X_\alpha = \{\delta\colon \delta \leq f(\alpha)\}$; on sait que $\kappa_\alpha = |X_\alpha| < 2^\kappa$, et de plus $\bigcup X_\alpha = 2^\kappa$, et donc $2^\kappa \leq \sum_{\alpha<\rho} \kappa_\alpha$.
En appliquant le lemme de König, on obtient que

$$2^\kappa \leq \sum_{\alpha<\rho} \kappa_\alpha < \prod_{\alpha<\rho} 2^\kappa = (2^\kappa)^\rho = 2^{\kappa\cdot\rho} .$$

Ceci n'est possible que si $\rho = \mathrm{cof}(2^\kappa) > \kappa$.
(2) En particulier, on en déduit qu'il est impossible que $2^{\aleph_0}$ ait pour cofinalité ω ; par exemple, il est impossible que $2^{\aleph_0} = \aleph_\omega$.

[1] L'axiome du choix est bien sûr utilisé ici ; on en a besoin de toute façon pour utiliser notre définition de l'arithmétique cardinale !