Université Claude Bernard Lyon I
Master 1

2nd semestre 2008/2009
Logique et théorie des ensembles

**Théorie des ensembles**
Feuille 4.

I. *Introduction aux filtres.*
Soit $X$ un ensemble infini. Un *filtre* sur $X$ est une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$ ;
2. $A \in \mathcal{F}$ et $B \supseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{F}$ ;
3. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

1. Montrer que pour tout $x \in X$ l'ensemble $\mathcal{F}_x = \{A \colon x \in A\}$ est un filtre.
2. On dit qu'une famille $\mathcal{A}$ est une *base de filtre* si toutes les intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}$ sont non vides. Montrer que pour toute base de filtre $\mathcal{A}$ il existe un filtre contenant $\mathcal{A}$.
3. On dit qu'un filtre $\mathcal{F}$ est un *ultrafiltre* si pour tout filtre $\mathcal{G}$ on a

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{G} \ .$$

Prouver qu'un filtre $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si, et seulement si, pour tout $A \in X$ on a $A \in \mathcal{F}$ ou $X \setminus A \in \mathcal{F}$.
4. Montrer que $\mathcal{F}_x$ est un ultrafiltre pour tout $x$.
5. Montrer, en utilisant l'axiome du choix, que tout filtre est contenu dans un ultrafiltre. En déduire l'existence d'un ultrafiltre *non principal*, c'est-à-dire qui ne soit pas égal à un $\mathcal{F}_x$.

**Correction.**
1. C'est une vérification directe des définitions.
2. Soit $\mathcal{A}$ une base de filtre ; on définit une famille de parties $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ en posant

$$F \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \exists A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \subseteq F \ .$$

Il est clair que cette famille contient $\mathcal{A}$ et satisfait les points 1 et 2 de la définition d'un filtre ; d'autre part, comme toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{A}$ est non vide, on voit que $\emptyset \notin \mathcal{F}$ et donc $\mathcal{F}$ est bien un filtre.
3. Soit $\mathcal{F}$ un filtre. S'il existe un filtre $\mathcal{G}$ contenant strictement $\mathcal{F}$, considérons une partie $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$ ; comme $X \setminus A \notin \mathcal{G}$, on voit qu'on doit avoir $X \setminus A \notin \mathcal{F}$. Réciproquement, s'il existe une partie $A$ telle que ni $A$ ni $X \setminus A$ n'appartiennent à $\mathcal{F}$, alors par la propriété 2 d'un filtre on a, pour tout $F \in \mathcal{F}$, à la fois $F \not\subseteq A$ et $F \not\subseteq X \setminus A$ ; en particulier $F \cap A \neq \emptyset$ pour tout $F \in \mathcal{F}$. Il est alors facile de vérifier que la famille $\mathcal{F} \cup \{A\}$ est une base de filtre, et et donc contenue dans un filtre, qui contient strictement $\mathcal{F}$. Par conséquent $\mathcal{F}$ n'est pas un ultrafiltre.
4. Il est clair que $\mathcal{F}_x$ satisfait la propriété de la question 3 (pour une partie $A$, soit $A$ contient $x$ soit $X \setminus A$ contient $x$ !)
5. Montrons déjà qu'il existe un filtre non principal : comme $X$ est infini, la famille des complémentaires des parties finies de $X$ est une base de filtre, et est donc contenue dans (au moins) un filtre $\mathcal{F}$, qui est non principal. Notons maintenant $\beta X$ l'ensemble des filtres non principaux sur $X$, ordonné par l'inclusion. Comme on vérifie sans peine que l'union d'une famille croissante de filtres (non principaux) est un filtre (non principal), on voit que $(\beta X, \subseteq)$ est un ensemble ordonné inductif, par conséquent il admet un élément maximal. Un tel élément maximal est un ultrafiltre non principal.

II. *Limites suivant un ultrafiltre.*
1. Montrer qu'un ultrafiltre sur un ensemble $X$ correspond à la donnée d'une mesure finiment additive $\mu \colon \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$. Dans la suite de cet exercice le mot ultrafiltre désignera une telle mesure.

2. On suppose maintenant que $X$ est un espace topologique. On dit qu'un ultrafiltre $\mu$ sur $X$ *converge* vers $x \in X$ si on a $\mu(V) = 1$ pour tout voisinage $V$ de $x$. Montrer que si $X$ est séparé alors un ultrafiltre a au plus une limite.
3. Montrer qu'un ultrafiltre $\mathcal{U}$ converge vers $x \in X$ si, et seulement si,

$$x \in \bigcap \mathcal{A}, \text{ avec } \mathcal{A} = \{A \subset X \colon \mu(A) = 1 \text{ et } A \text{ est fermé}\} \ .$$

4. Si $X, Y$ sont deux ensembles, $\mu$ est un ultrafiltre sur $X$ et $f \colon X \to Y$ est une fonction alors on peut définir l'ultrafiltre image $\nu = f(\mu)$ en posant

$$\nu(A) = \mu(f^{-1}(A)) \ .$$

Montrer que $\nu$ est un ultrafiltre. Si $\nu$ converge vers $y \in Y$, on dit que $y$ est la limite de $f$ selon l'ultrafiltre $\mu$.
*La suite de l'exercice est destinée à ceux qui connaissent un peu de topologie ; on suppose que l'axiome du choix est vrai.*
5. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et $Y = \prod X_i$, muni de la topologie produit. Pour tout $i$ on considère la projection sur la $i$-ième coordonnée $\pi_i \colon Y \to F$. Montrer qu'un ultrafiltre $\mu$ sur $Y$ est convergent si, et seulement si, $\pi_i(\mu)$ est convergent pour tout $i \in I$.
6. Soit $X$ un un espace topologique et $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement de $X$ par des ouverts qui ne contienne aucun sous-recouvrement fini. Montrer que la famille des complémentaires des $O_i$ est une base de filtre, et en déduire qu'il existe un ultrafiltre $\mu$ sur $X$ tel que $\mu(O_i) = 0$ pour tout $i \in I$. Prouver que $\mu$ n'est pas convergent.
7. Soit maintenant $X$ un espace topologique compact. Montrer que tout ultrafiltre sur $X$ est convergent.
8. En déduire qu'un espace topologique $X$ est compact si, et seulement si, tout ultrafiltre sur $X$ est convergent ; puis obtenir une preuve du théorème de Tychonoff : un produit d'espaces topologiques compacts est compact.

**Correction.**
1. Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, on peut définir une mesure finiment additive $\mu \colon X \to \{0, 1\}$ en posant

$$\mu(A) = 1 \Leftrightarrow A \in \mathcal{U}$$

Réciproquement, si $\mu \colon X \to \{0, 1\}$ est une mesure finiment additive, alors on peut définir un ultrafiltre $\mathcal{U}$ en utilisant la même équation que ci-dessus.
2. Supposons que $X$ est séparé, et soit $\mu$ un ultrafiltre sur $X$ convergeant vers $x \in X$. Soit $y \in X$ ; on veut montrer que $y$ ne peut pas être une limite de $\mu$. Comme $X$ est séparé, on sait qu'il existe deux ouverts disjoints $U, V$ avec $x \in U$, $y \in V$. Commme $x$ est une limite de $\mu$, on a $\mu(U) = 1$, et comme $U$ et $V$ sont disjoints on doit alors avoir $\mu(V) = 0$, ce qui montre que $y$ n'est pas une limite de $\mu$.
3. Par définition, un ultrafiltre converge vers $x \in X$ si et seulement si $\mu(V) = 1$ pour tout voisinage de $x$. Soit alors $A$ un fermé de mesure 1 ; pour tout voisinage $V$ de $x$ on a $\mu(A \cap V) = 1$, par conséquent $A \cap V$ est non vide pour tout voisinage $V$ de $x$, et donc comme $A$ est fermé on doit avoir $x \in A$. Réciproquement, si $x \in A$ pour tout fermé $A$ de mesure 1, soit $V$ un ouvert contenant $x$. Si $\mu(V) = 0$ alors $\mu(X \setminus V) = 1$, et $X \setminus V$ est un fermé qui ne contient pas $x$, ce qui est absurde. On doit donc bien avoir $\mu(V) = 1$ pour tout ouvert $V$ contenant $x$.
4. Il est immédiat de vérifier que $\nu$ est bien une mesure finiment additive (rappelons que l'opération image réciproque commute avec les opérations ensemblistes d'union, intersection et complémentaire).
5. Commençons par montrer que si $f \colon X \to Y$ est continue ($X$, $Y$ étant des espaces topologiques) et $\mu$ est un ultrafiltre convergent sur $X$ alors $f(\mu)$ est un ultrafiltre convergent sur $Y$. En effet, appelons $x$ la limite de $\mu$, et posons $y = f(x)$. Pour tout voisinage $V$ de $y$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de $x$ (par continuité de $f$) et par conséquent $\mu(f^{-1}(V)) = 1$. Ceci prouve que $f(\mu)$ converge vers $f(x)$.
La topologie produit étant définie de telle façon que les projections $\pi_i$ sont toutes continues, ceci prouve que si $\mu$ est un ultrafiltre convergent sur $Y$ alors $\pi_i(\mu)$ est un ultrafiltre convergent sur $X_i$ pour tout $i \in I$.
Pour prouver la réciproque, notons $x_i$ la limite de $\pi_i(\mu)$ pour tout $i \in U$, et posons $\overline{x} = (x_i)_{i \in I}$ ; on veut montrer que $\overline{x}$ est la limite de $\mu$. Pour cela, fixons un ouvert $V$ contenant $x$ ; par définition de la topologie produit, il existe $i_1, \ldots, i_n \in I$ et $O_{i_1}, \ldots, O_{i_n}$ ouverts de $X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}$ tels que

$$\forall y \in Y \ (\forall k = 1, \ldots, n \ \pi_{i_k}(y) \in O_{i_k}) \Leftrightarrow y \in V$$

Autrement dit,
$$\forall y \in Y \ (\forall k = 1, \ldots, n \ y \in \pi_{i_k}^{-1}(O_{i_k})) \Leftrightarrow y \in V$$

Par hypothèse sur $\pi_i(\mu)$, on sait que chacun des $\pi_{i_k}^{-1}(O_{i_k})$ est de mesure 1, et donc l'équation ci-dessus prouve que $V$ contient un ensemble de mesure 1, ce qui à son tour entraîne que $\mu(V) = 1$.
6. Dire que le recouvrement n'admet pas de sous-recouvrement fini signifie que pour tout $O_1, \ldots, O_n$ dans le recouvrement on a $\cup O_i \neq X$, c'est-à-dire $\cap(X \setminus O_i) \neq \emptyset$. Par conséquent la famille des complémentaires des $O_i$ est une base de filtre, qui d'après l'exercice 1 est contenue dans un filtre, et donc dans un ultrafiltre, ce qui nous donne l'existence d'un ultrafiltre $\mu$ sur $X$ tel que $\mu(X \setminus O_i) = 1$ pour tout $i \in I$, ou encore $\mu(O_i) = 0$ pour tout $i \in I$.
Comme le recouvrement est par des ouverts, cet ultrafiltre ne peut pas être convergent : en effet, pour tout $x \in X$ il existe un $i$ tel que $x \in O_i$, et comme on a $\mu(O_i) = 0$ et que $O_i$ est un voisinage de $x$ on voit que $x$ ne peut pas être la limite de $\mu$.
7. Si $\mu$ est un ultrafiltre sur $X$, alors la famille formée par les parties fermées de mesure 1 a la propriété d'intersections finies non vides. Si $X$ est compact, ceci impose que l'intersection de toutes les parties fermées de mesure 1 est non vide, et d'après le point 3 de cet exercice cela prouve que $\mu$ est convergent.
8. La première équivalence est une conséquence directe des points 6 et 7 de cet exercice. Pour prouver le théorème de Tychonoff, fixons un ensemble $I$, une famille d'espaces compacts $(X_i)_{i \in I}$ et posons $Y = \prod X_i$, muni de la topologie produit. Soit $\mu$ un ultrafiltre sur $Y$ ; alors pour tout $i \in I$ on sait que $\pi_i(\mu)$ est un ultrafiltre sur $Y$, qui doit converger puisque $Y$ est compact. D'après le point 5 de cet exercice, ceci entraîne que $\mu$ est convergent et, ceci étant vrai pour tout ultrafiltre $\mu$ sur $Y$, on en déduit que $Y$ est compact.

III. *Introduction aux ultraproduits.*
1. Soit $I$ un ensemble, $\mu$ un ultrafiltre sur $I$, et $G_i$ une famille de groupes, d'élément neutre $e_i$. On définit $H \subseteq \prod G_i$ par
$$H = \{(g_i) \colon \mu(\{i \in I \colon g_i = e_i\}) = 1\}$$
Montrer que $H$ est un sous-groupe distingué du groupe produit $\prod G_i$. On appelle *ultraproduit* des groupes $G_i$ selon l'ultrafiltre $\mu$ le groupe quotient $G_{/H}$.
2. On suppose cette fois-ci que les $G_i$ sont des groupes munis d'une distance bi-invariante et bornée $d_i$ (c'est-à-dire que $d_i(gkg', ghg') = d(k,h)$ pour tous $g, g', h, k$) et on considère l'ensemble
$$H' = \{(g_i) \colon \lim_{\mu} d_i(g_i, e_i) = 0\} \ .$$
($\lim_\mu$ désigne la limite selon l'ultrafiltre $\mu$).
Montrer que $H'$ est un sous-groupe distingué de $\prod G_i$ ; par conséquent $\prod {G_i}_{/H'}$ est naturellement un groupe, quotient de l'ultraproduit des $G_i$ selon $\mu$ ; on dit que ce groupe est l'ultraproduit des $(G_i, d_i)$ selon $\mu$ (et si $d_i$ est la distance discrète on retrouve l'ultraproduit du point 1).
3. Un cas particulier : on peut munir le groupe de permutation $\mathcal{S}_n$ de la *distance de Hamming* $d_n$ défine par
$$d_n(\sigma, \tau) = \frac{|\{i \colon \sigma(i) \neq \tau(i)\}|}{n} \ .$$
On dit qu'un groupe $G$ est *sofique* s'il existe un ensemble $I$, un ultrafiltre $\mu$ et des entiers $n_i$ tels que $G$ est isomorphe à un sous-groupe de l'ultraproduit des $(\mathcal{S}_{n_i}, d_i)$ selon $\mu$.
Montrer que $\mathcal{S}_n$ est sofique pour tout $n$ ; prouver que tout groupe fini est sofique.
4. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la permutation $\tau_{n,i}$ de $\{1, \ldots, n\}$ définie par
$$\tau_{n,i}(k) = k + i \ [n] \ .$$
L'application $i \mapsto \tau_{n,i}$ est un morphisme de $\mathbb{Z}$ dans $\mathcal{S}_n$. En supposant qu'il existe un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{Z}$ est sofique.
*Avertissement : La question suivante est un problème ouvert...*
5. Montrer que tout groupe est sofique.

**Correction.**
1. Commençons par vérifier que $H$ est bien un sous-groupe de $\prod G_i$ : soit $g = (g_i)_{i \in I}$ et $h = (h_i)_{i \in I}$ deux éléments de $H$. Alors $g.h^{-1} = (g_i h_i^{-1})_{i \in I}$. On a $\mu(\{i \in I \colon g_i = e_i\}) = 1$ et $\mu(\{i \in I \colon h_i = e_i\}) = 1$, par conséquent $\mu(\{i \in I \colon g_i = e_i \text{ et } h_i = e_i\}) = 1$, ce qui montre que $\mu(\{i \in I \colon g_i h_i^{-1} = e_i\}) = 1$, et donc $g.h^{-1} \in H$.
Pour voir que $H$ est distingué, la même méthode marche.
2. Reprenons la méthode de la question 1, et considérons $g = (g_i)_{i \in I}$ et $h = (h_i)_{i \in I}$ deux éléments de $H'$. Notons qu'on a pour tout $i \in I$, puisque $d_i$ est bi-invariante :

$$d_i(g_i h_i^{-1}, e_i) = d_i(g_i, h_i) \leq d(g_i, e_i) + d_i(h_i, e_i) \ .$$

Il est facile de vérifier que si $a_i \leq b_i + c_i$ pour tout $i \in I$, alors $\lim_\mu(a_i) \leq \lim_\mu(b_i) + \lim_\mu(c_i)$, et on en déduit que $gh^{-1} \in H'$.
Prouvons maintenant que $H'$ est distingué ; soit $g \in \prod G_i$, et $h \in h'$. Pour tout $i \in I$, on voit (en utilisant le fait que $d_i$ est bi-invariante) que $d_i(g_i h_i g_i^{-1}, e_i) = d(h_i, e_i)$. Par conséquent, $ghg^{-1} \in H'$.
3. Pour montrer que $\mathcal{S}_n$ est sofique, il suffit de considérer le filtre $\{\{n\}\}$ sur l'ensemble $\{n\}$, et de considérer l'ultraproduit correspondant (qui est égal à $\mathcal{S}_n$). Si vous n'aimez pas les filtres sur des ensembles finis, vous pouvez aussi considérer le filtre sur $\mathbb{N}$ constitué par les parties contenant $n$, puis considérer l'ultraproduit des $\mathcal{S}_i$ associé à cet ultrafiltre, qui est aussi égal à $\mathcal{S}_n$.
En considérant l'action de $G$ sur lui-même par translation à gauche, on obtient un morphisme injectif de $G$ dans $\mathcal{S}_n$, où $n$ est le cardinal de $G$ ; par conséquent tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe d'un certain $\mathcal{S}_n$. Comme un sous-groupe d'un groupe sofique est sofique, ceci prouve que tout groupe fini est sofique.
4. Soit $\mu$ un ulrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$ ; appelons $G$ le produit des $\mathcal{S}_n$ selon l'ultrafiltre $\mu$, et considérons l'application qui à $n \in \mathbb{Z}$ associe la classe d'équivalence de $(\tau_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$. Cette application est bien un morphisme à valeurs dans l'ultraproduit des $\mathcal{S}_n$ selon $\mu$, et on doit vérifier que ce morphisme est injectif. Prenons donc $i$ dans son noyau ; on a par définition

$$\mu(\{n \in \mathbb{N} \colon \tau_{n,i} = id_{\{1,\dots,n\}}\}) = 1$$

Comme $\mu$ et non principal, les parties finies sont de mesure nulle, et par conséquent

$$\mu(\{n \in \mathbb{N} \colon n > |i| \text{ et } \tau_{n,i} = id_{\{1,\dots,n\}}\}) = 1 \ .$$

Pour chacun des $n$ dans l'ensemble ci-dessus, on doit avoir $0 = i[n]$ et donc , puisque $|i| < n$, $i = 0$. Ceci montre que notre morphisme est injectif et donc que $\mathbb{Z}$ est sofique.
5. J'avais une fort jolie démonstration, mais elle ne rentrait pas dans la marge...