Université Claude Bernard Lyon I
Master 1

2nd semestre 2008/2009
Logique et théorie des ensembles

Théorie des modèles
Feuille 2.

I. On se place dans le langage $\mathcal{L} = \{R\}$, où R est une relation binaire. On considère la théorie T dans ce langage qui dit que R est symétrique et irréflexive (i.e les modèles de T sont des graphes) et telle que pour deux ensembles finis disjoints X_1, X_2 de sommets il existe un point qui est R-lié à tous les éléments de X_1 et n'est R-lié à aucun des éléments de X_2.
(a) Donner une axiomatisation de cette théorie.
(b) Montrer que les modèles de T sont nécessairement infinis, et que deux modèles dénombrables de T sont isomorphes (l'unique modèle dénombrable de T, à isomorphisme près, est appelé le *graphe aléatoire*). Prouver que T est complète.
(c) Montrer que tous les modèles de T sont ω-saturés.

II. Soit T une théorie complète dans un langage $\mathcal{L}$ dénombrable. Montrer que T est $\aleph_0$-catégorique si, et seulement si, tous les modèles dénombrables de T sont saturés.

III. Ici on se place dans le langage des corps $\mathcal{L} = \{+, ., -, ^{-1}, 0, 1\}$ et on considère les $\mathcal{L}$-structures $\mathbb{Q}$, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ($\overline{\mathbb{Q}}$ désigne la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, autrement dit l'ensemble des complexes qui sont racines d'un polynôme non nul à coefficients rationnels). Déterminer quelles structures de cette liste sont ω-saturées.

IV. Faire les DM 6 et 8 de l'an dernier, ou au moins lire attentivement leurs corrections...