Université Claude Bernard Lyon I | 2nd semestre 2008/2009
Master 1 | Logique et théorie des ensembles

I. Soit T une théorie complète. Montrer que si T a un modèle fini alors tous les modèles de T sont isomorphes. Le résultat est-il encore vrai si l'on ne suppose pas que T est complète ?
Correction.
L'énoncé "la structure $\mathcal{M}$ a au plus n éléments" est un énoncé du premier ordre :

$$\forall x_1, \ldots, x_n \left(\bigvee_{1 \leq i < j \leq n} x_i = x_j \right)$$

Par conséquent, si cet énoncé est vrai dans un modèle de T alors il est vrai dans tout modèle de T (puisque T est complète). Autrement dit, si T est une théorie complète qui a un modèle fini alors tous les modèles de T sont finis. Vous avez vu en cours que deux structures finies élémentairement équivalentes sont isomorphes ; comme par définition tous les modèles d'une même théorie complète sont élémentairement équivalents, on en déduit que tous les modèles de T sont isomorphes.

II. Montrer que la théorie des corps infinis n'est pas complète.
Correction.
Rappelons que le langage des corps contient les constantes 0 et 1 ; l'énoncé "$\forall x\, x^2 + 1 \neq 0$" est vrai dans $\mathbb{R}$ mais faux dans $\mathbb{C}$, ce qui prouve que ni cet énoncé ni sa négation n'appartiennent à la théorie des corps infinis, par conséquent celle-ci n'est pas complète.

III. Donner un exemple de stuctures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ telles que $\mathcal{M}$ soit une sous-structure de $\mathcal{N}$ mais ne soit pas élémentairement équivalente à $\mathcal{N}$.
Correction.
Considérons par exemple le langage $\mathcal{L} = \{=\}$ et les deux $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{M} = \{0\}$, $\mathcal{N} = \mathbb{N}$. Alors $\mathcal{M}$ est bien sûr une sous-structure de $\mathcal{N}$; mais $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ ne sont pas élémentairement équivalentes, puisque l'énoncé "il existe deux éléments distincts" est vrai dans $\mathcal{N}$ et faux dans $\mathcal{M}$.
Peut-être plus intéressant : on peut aussi fournir un exemple de structures $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ telles que $\mathcal{M}$ soit une sous-structure de $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ soient élémentairement équivalentes (et même isomorphes !) mais $\mathcal{M}$ ne soit pas une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$. Par exemple, considérons le langage $\mathcal{L}$ avec une relation binaire $<$ et les deux $\mathcal{L}$ structures $\mathcal{M} = (\mathbb{Q} \cap]-\infty, 0], <)$ et $\mathcal{N} = (\mathbb{Q} \cap]-\infty, 1], <)$, où $<$ désigne l'ordre usuel de $\mathbb{R}$. Il est bien clair que ces deux structures sont isomorphes, et que $\mathcal{M}$ est une sous-structure de $\mathcal{N}$. Considérons maintenant l'élément 0 ; dans $\mathcal{M}$ il satisfait la formule $\forall y\ (y < x \vee y = x)$, tandis qu'il ne satisfait pas cette formule dans $\mathcal{N}$.

IV. Montrer qu'une théorie T qui a des modèles finis arbitrairement grands a un modèle infini.
Correction.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ considérons l'énoncé E_n suivant :

$$\exists x_1, \ldots, x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \right) .$$

Maintenant, appelons $\mathcal{E}$ la famille d'énoncés $\{E_n : n \in \mathbb{N}^*\}$. Par hypothèse, tout fragment fini de $\mathcal{E}$ est réalisé dans un modèle de T ; par conséquent, le théorème de compacité assure qu'il existe un modèle de T dans lequel tous les énoncés de $\mathcal{E}$ sont réalisés, et donc il existe un modèle infini de T.

V. Soit T la théorie de $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, 1, +)$. Montrer qu'il existe un modèle de T qui étend élémentairement $(\mathbb{N}, 0, 1, +)$ ayant un élément a non nul et divisible par tous les entiers standard non nuls.
Correction.
Il s'agit encore là d'une application directe du théorème de compacité et de la méthode des diagrammes :

notons $\mathcal{L}^+$ le langage $\{0,1,+,\{c_m\}_{m\geq 2},d\}$ où les c_m et d sont des symboles de constante. Nous définissons

$$T^+ = \mathrm{Th}((\mathcal{N},m)_{m\geq 2}) \cup \{\exists x(\underbrace{x+\ldots+x}_{m \text{ fois}} = d) \mid m \in \mathbb{N}^*\} \cup \{d \neq 0\} \ .$$

Par compacité, T^+ est un ensemble consistant d'énoncés. Exercez-vous à écrire les détails du raisonnement. Un modèle de T^+, après réduction au langage $\mathcal{L}$ sera alors une extension élémentaire de $\mathcal{N}$ contenant un élément divisible par tous les entiers naturels non nuls.

VI. Soit $\mathcal{L} = \{P_i \colon i < \omega\}$, où les P_i sont des relations unaires. On note T la théorie qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints et que chaque P_i est infini. Montrer que T n'est κ-catégorique pour aucun cardinal $\kappa > \aleph_0$ et que T est complète.

Correction.
Un modèle de T de cardinal κ est exactement la donnée d'une partition d'un ensemble de cardinal κ en $\aleph_0$ parties infinies. Un isomorphisme entre deux modèles de T $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ est exactement une bijection de M_1 sur M_2 qui envoie chaque membre de la partition de M_1 sur un membre de la partition de M_2. Si κ est non dénombrable, alors on peut partitionner κ en $\aleph_0$ parties de cardinal κ, et on peut aussi partitionner κ en $\aleph_0$ parties dont l'une est de cardinal $\aleph_0$. Comme une bijection préserve le cardinal (!) ceci montre qu'il existe des modèles de T de cardinal κ et non isomorphes.
Par contre, deux modèles de T de cardinal $\aleph_0$ sont isomorphes (à une partition de $\mathbb{N}$ en $\aleph_0$ ensembles infinis disjoints), ce qui prouve que T est $\aleph_0$-catégorique et donc complète (le corollaire 6.2.2 des notes de cours) (puisque notre langage est dénombrable).

Le corrigé de l'exercice suivant sera un peu rapide ; n'hésitez pas à me poser des questions si certains points restent obscurs !

VII. Nous considérons un langage $\mathcal{L}$ comprenant une infinité dénombrable de symboles de relations binaires : $\mathcal{L} = \{E_i | i < \omega\}$.
1. Ecrire les énoncés qui disent que pour tout $i < \omega$, E_i est une relation d'équivalence, que E_0 n'a qu'une seule classe et que les classes de E_{i+1} sont obtenues en divisant chaque E_i-classe en exactement deux classes infinies.
Réponse.
Dire que E_i est une relation d'équivalence se fait (par exemple) avec les trois énoncés suivants :
– $\forall x \ E_i(x,x)$;
– $\forall x,y \ \ (E_i(x,y) \to E_i(y,x))$;
– $\forall x,y,z \ \ (E_i(x,y) \wedge E_i(y,z) \to E_i(x,z))$.
(On a successivement écrit que E_i est réflexive, symétrique, et transitive)
Dire que E_0 n'a qu'une seule classe s'écrit :
– $\forall x,y \ E_0(x,y)$.
Enfin, la dernière condition s'obtient en combinant les trois familles d'énoncés suivants (qu'on pourrait bien sûr condenser en une seule en mettant des "et" !), paramétrées par $i \in \mathbb{N}$:
– $\forall x,y \ \ (E_{i+1}(x,y) \to E_i(x,y))$;
– $\forall x \ \exists y,z \ \ (E_i(x,y) \wedge E_i(x,z) \wedge \neg E_{i+1}(y,z))$;
– $\forall x_1,x_2,x_3 \ \left(\bigwedge_{1\leq i,j\leq 3} E_i(x_i,x_j) \to \bigvee_{1\leq i\neq j\leq 3} E_{i+1}(x_i,x_j)\right)$.
(On a dit successivement que toutes les classes de E_{i+1} sont contenues dans les classes de E_i, que chaque E_i-classe contient au moins deux E_{i+1}-classes distinctes, et qu'une E_i-classe ne peut pas contenir trois E_{i+1}-classes distinctes).

2. Montrer que la structure suivante est un modèle dénombrable des énoncés du premier point :

$$\mathcal{M}_0 = (\{f \in 2^\omega | \text{il existe } i < \omega \text{ tel que pour tout } j \geq i, \ f(i) = f(j). \ \} \ ; E_i(x_1,x_2) \ (i < \omega)) \ ,$$

où pour tout $i \in \omega$, $(\sigma_1,\sigma_2) \in E_i^{\mathcal{M}_0}$ si et seulement si $\sigma_1 \lceil i = \sigma_2 \lceil i$.

Le point 2 montre que les énoncés du premier point forment un ensemble consistant. Ces énoncés et leurs conséquences seront notés T.

Réponse.
C'est une vérification directe qui ne devrait poser aucune difficulté.

3. Nous dirons qu'on modèle $\mathcal{M}$ de T est *riche* si pour tout $\sigma \in M$ il existe une infinité de $\theta \in M$ tel que $\mathcal{M} \models E_i(\sigma, \theta)$ pour tout $i < \omega$. *Nous montrerons que deux modèles riches de T sont élémentairement équivalents.*
Comme vous connaissez la notion d'extension élémentaire et que vous aurez vu la preuve du théorème de Löwenheim-Skolem ascendant avant d'aborder cet exercice, démontrez l'énoncé suivant :

tout modèle de T a une extension élémentaire riche de même cardinal que lui.

Réponse.
Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T ; comme d'habitude, pour construire une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ on commence par rajouter à notre langage un symbole de constante c_m pour chaque élément de M. On veut ensuite assurer que pour tout élément il existe une infinité d'éléments qui lui soient E_i-équivalents pour tout $i < \omega$; rajoutons encore à notre langage des constantes $a_{m,k}$ ($m \in M$, $k < \omega$) et considérons les énoncés suivants (paramétrés par $m \in M$, $i, k, k' < \omega$ avec $k \neq k'$) :

$$E_i(a_{m,k}, c_m) \wedge (a_{m,k} \neq a_{m,k'}) \ .$$

Les fragments finis de cette famille d'énoncés sont tous consistants avec la théorie $T(\mathcal{M}^+)$ de notre structure $\mathcal{M}$ dans ce langage augmenté ; par compacité on en déduit qu'il existe un modèle $\mathcal{N}^+$ de cette théorie. Quand on considère le réduit de $\mathcal{N}^+$ à notre langage de départ, on obtient une extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ dans laquelle pour chaque élément m de M il existe une infinité d'éléments de N qui soient E_i-équivalents à m pour tout $i < \omega$. On peut poser $\mathcal{N} = \mathcal{M}_1$, et appliquer la même construction à $\mathcal{M}_1$ pour obtenir une nouvelle extension élémentaire $\mathcal{M}_2$, et ainsi de suite ; en bout de chaîne, en posant $\mathcal{M}_\infty = \bigcup \mathcal{M}_i$, on obtient une extension élémentaire riche de $\mathcal{M}$.

4. Cette étape est une illustration de la méthode de va-et-vient en utilisant un modèle riche. Plus précisément nous effectuerons un "va", le "vient" étant symétrique. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles dont $\mathcal{N}$ est riche. Fixons $k \in \mathbb{N}$, supposons que $(a_1, \ldots, a_k)$ et $(b_1, \ldots, b_k)$ soient deux k-uplets extraits de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ respectivement et soumis aux conditions suivantes : pour toute paire (k_1, k_2) avec $1 \leq k_1, k_2 \leq k$, pour tout $i < \omega$,

1. $\mathcal{M} \models E_i(a_{k_1}, a_{k_2})$ si et seulement si $\mathcal{N} \models E_i(b_{k_1}, b_{k_2})$;
2. $a_{k_1} = a_{k_2}$ si et seulement si $b_{k_1} = b_{k_2}$.

Montrer que si $\alpha \in M$ est arbitrairement choisi alors il existe $\beta \in N$ tel que $(a_1, \ldots, a_k, \alpha)$ et $(b_1, \ldots, b_k, \beta)$ satisfassent les mêmes conditions.
Réponse.
Ici, ce serait une bonne idée de faire un dessin pour comprendre ce qui se passe. Fixons deux k-uplets $(a_1, \ldots, a_k)$ et $(b_1, \ldots, b_k)$ comme ci-dessus, puis prenons $\alpha \in M$. Pour simplifier la rédaction, supposons que les a_i (et donc les b_i) sont deux à deux disctincts, notons $a \sim b$ si $E_i(a, b)$ pour tout $i < \omega$, et posons $I = \{i \colon a_i \sim \alpha\}$, et traitons tout d'abord le cas où I est non vide. Puisque $\mathcal{N}$ est riche, il existe un élément β qui soit $\sim$ à chacun des b_i $(i \in I)$ et distinct des b_i ; un tel β satisfait les conditions recherchées.
Si maintenant I est vide, alors pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$ il existe un plus petit i_j tel que $\neg(a_j E_{i_j} \alpha)$; il est facile (mais un peu fastidieux !) de se convaincre que l'on peut trouver β comme dans l'énoncé (raisonnez par exemple par récurrence sur k).

5. Déduire du point (4) par une récurrence sur la complexité des formules que deux modèles riches de cardinaux arbitraires sont élémentairement équivalents. Conclure que T est une théorie complète.
Réponse.

Soit $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ deux modèles riches. On va commencer par montrer que si $(a_1, \dots, a_k)$, $(b_1, \dots, b_k)$ sont comme au point 4 et $\phi(x_1, \dots, x_k)$ est une formule, alors

$$(\mathcal{M} \models \phi(a_1, \dots, a_k)) \Leftrightarrow (\mathcal{N} \models \phi(b_1, \dots, b_k)) \ .$$

Si ϕ est atomique, alors l'équivalence est claire ; elle donc aussi vraie pour toute formule sans quantificateurs. L'équivalence est aussi clairement vraie si ϕ est de la forme $\neg\psi$, où ψ satisfait l'équivalence que l'on cherche à établir.
Supposons maintenant que ϕ est de la forme $\exists x \psi(x_1, \dots, x_n, x)$, où ψ satisfait l'équivalence que l'on cherche à établir pour ϕ. Alors, dire que $\mathcal{M} \models \phi(a_1, \dots, a_k)$ signifie qu'il existe $\alpha \in M$ tel que l'on ait $\mathcal{M} \models \phi(a_1, \dots, a_k, \alpha)$. On peut alors trouver $\beta \in N$ tel que $(a_1, \dots, a_k, \alpha)$ et $(b_1, \dots, b_k, \beta)$ satisfassent aux conditions du point 4, et donc par récurrence

$$\mathcal{M} \models \psi(a_1, \dots, a_k, \alpha) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \psi(b_1, \dots, b_k, \beta) \ .$$

On en déduit bien l'équivalence annoncée ; en particulier, si ϕ est sans variables libres (c'est-à-dire si ϕ est un énoncé) alors on voit que

$$(\mathcal{M} \models \phi) \Leftrightarrow (\mathcal{N} \models \phi) \ .$$

Ceci prouve que deux modèles riches sont élémentairement équivalents ; notez que pour prouver ça on a dû raisonner sur les *formules*, et pas seulement sur les *énoncés* (la raison étant que par exemple un énoncé peut être de la forme $\exists x \phi(x)$, où ϕ est une formule, et qu'on a besoin d'avoir étudié ϕ pour pouvoir conclure).
On a vu précédemment que tout modèle de T a une extension élémentaire riche ; par conséquent, tous les modèles de T sont élémentairement équivalents, et donc T est une théorie complète.

6. Montrer qu'il n'y a à isomorphisme près qu'un seul modèle riche dénombrable.
Réponse.
Sans surprise, on va utiliser la méthode de va-et-vient, en utilisant le résultat établi au point 4. Soit $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ deux modèles riches dénombrables, et soit (m_k), (n_k) des énumérationsde M, N.
En utilisant le résultat du point 4, on peut construire deux suites finies $(a_k) \in M^{\mathbb{N}}$, $(b_k) \in N^{\mathbb{N}}$ telles que
- $\forall k \, m_k \in \{a_1, \dots, a_{2k}\}$
- $\forall k \, n_k \in \{b_1, \dots, b_{2k+1}\}$
- $\forall k \ (a_1, \dots, a_k)$ et $(b_1, \dots, b_k)$ satisfont les conditions du point 4.

Le premier point assure que $M = \{a_k\}$ tandis que le deuxième garantit que $N = \{b_k\}$; on peut maintenant considérer l'application $f \colon M \to N$ définie par $f(a_k) = b_k$. D'après ce qui a été prouvé au point 5, pour toute formule $\phi(x_1, \dots, x_k)$ et tout $i_1, \dots, i_k$ on a

$$\mathcal{M} \models \phi(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi(b_{i_1}, \dots, b_{i_k}) \ .$$

En particulier, f est un isomorphisme de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{N}$.

7. Montrer que T élimine les quantificateurs : pour toute formule $\phi(x_1, \dots, x_l)$ $(l \in \mathbb{N}^*)$ du premier ordre à exactement l variables dans le langage $\mathcal{L}$, il existe une formule $\psi(x_1, \dots, x_l)$ avec les mêmes variables libres telle que $T \vdash \big(\forall x_1 \dots x_l \, \psi(x_1, \dots, x_l) \ \leftrightarrow \phi(x_1, \dots, x_l)\big)$.
Réponse.
En termes savants, on a montré dans les points précédents qu'un type est complètement déterminé par ses formules sans quantificateurs ; moralement, cela doit permettre de démontrer que la théorie élimine les quantificateurs.
On va suivre un schéma général de preuve qu'une théorie élimine les quantificateurs. Soit $\phi(x_1, \dots, x_l)$ une formule $(l \geq 1)$ à exactement l variables dans le langage $\mathcal{L}$; posons

$$\Gamma(x_1, \dots, x_l) = \{\psi(x_1, \dots, x_l) \colon \psi \text{ est sans quantificateurs et } T \vdash \forall x_1, \dots, x_l \, \phi(x_1, \dots, x_l) \to \psi(x_1, \dots, x_l)\} \ .$$

Ajoutons l symboles de constante $d_1, \dots, d_l$ à notre langage ; on va montrer que $T \cup \Gamma(d_1, \dots, d_l) \vdash \phi(d_1, \dots, d_l)$. Par compacité ceci impliquera qu'il existe $\psi_1(\overline{d}), \dots, \psi_m(\overline{d}) \in \Gamma(\overline{d})$ telles que

$$T \cup \{\psi_1(\overline{d}), \dots, \psi_m(\overline{d})\} \vdash \phi(\overline{d}) \ .$$

Alors il est facile de vérifier que

$$T \vdash \forall \overline{x} \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i(\overline{x}) \leftrightarrow \phi(\overline{x}) \ .$$

Pour conclure, on doit donc montrer que $T \cup \Gamma(\overline{d}) \vdash \phi(\overline{d})$.
Raisonnons par l'absurde : si ce n'est pas le cas, il existe un modèle $\mathcal{M}$ de $T \cup \Gamma(\overline{d}) \cup \{\neg\phi(\overline{d})\}$. Appelons $\Sigma(\overline{d})$ l'ensemble des formules sans quantificateurs $\psi(\overline{d})$ telles que $\mathcal{M} \models \psi(\overline{d})$; si $T \cup \Sigma(\overline{d}) \cup \{\phi(\overline{d})\}$ n'est pas satisfaisable, il existe $\psi_1(\overline{d}), \ldots, \psi_n(\overline{d})$ sans quantificateurs telles que

$$T \vdash \forall \overline{x} \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i(\overline{x}) \rightarrow \neg\phi(\overline{x}) \right) \ .$$

Autrement dit,

$$T \vdash \forall \overline{x} \left(\phi(\overline{x}) \rightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \neg\psi_i(\overline{x}) \right) \ .$$

Ceci signifie que $\bigvee_{i=1}^{n} \neg\psi_i(\overline{d}) \in \Gamma(\overline{d})$, et cela est impossible puisque cette formule n'est pas réalisée dans $\mathcal{M}$ qui est censé être un modèle de $\Gamma(\overline{d})$.
Par conséquent, il doit exister aussi un modèle $\mathcal{N}$ de $T \cup \Sigma(\overline{d}) \cup \{\varphi(\overline{d}\}$; pour simplifier la notation, posons $(a_1, \ldots, a_l) = (d_1^{\mathcal{M}}, \ldots, d_l^{\mathcal{M}})$ et $(b_1, \ldots, b_l) = (d_1^{\mathcal{N}}, \ldots, d_l^{\mathcal{N}})$. Alors $(a_1, \ldots, a_l)$ et $(b_1, \ldots, b_l)$ satisfont exactement les mêmes formules sans quantificateurs (à savoir les formules de $\Sigma(\overline{d})$, qui est un ensemble consistant maximal de formules sans quantificateurs). Mais alors on sait que $(a_1, \ldots, a_l)$ et $(b_1, \ldots, b_l)$ devraient satisfaire exactement les mêmes formules (en utilisant le point 5 et le fait que tout modèle a une extension élémentaire riche), et ce n'est bien sûr pas le cas, ce qui est une contradiction.

8. Montrer qu'un modèle de T est riche si et seulement s'il est ω-saturé.
Réponse : Sera donnée par vous...