Université Claude Bernard Lyon I 2nd semestre 2008/2009
Master 1 Logique et théorie des ensembles

I. Soit T une théorie complète. Montrer que si T a un modèle fini alors tous les modèles de T sont isomorphes. Le résultat est-il encore vrai si l'on ne suppose pas que T est complète ?

II. Montrer que la théorie des corps infinis n'est pas complète.

III. Donner un exemple de stuctures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ telles que $\mathcal{M}$ soit une sous-structure de $\mathcal{N}$ mais ne soit pas élémentairement équivalente à $\mathcal{N}$.

IV. Montrer qu'une théorie T qui a des modèles finis arbitrairement grands a un modèle infini.

V. Soit T la théorie de $(\mathbb{N}, 0, 1, +)$. Montrer qu'il existe un modèle de T qui étend élémentairement $(\mathbb{N}, 0, 1, +)$ ayant un élément a non nul et divisible par tous les entiers standard non nuls.

VI. Soit $\mathcal{L} = \{P_i : i < \omega\}$, où les P_i sont des relations unaires. On note T la théorie qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints et que chaque P_i est infini. Montrer que T n'est κ-catégorique pour aucun cardinal $\kappa > \aleph_0$ et que T est complète.

VII. Nous considérons un langage $\mathcal{L}$ comprenant une infinité dénombrable de symboles de relations binaires : $\mathcal{L} = \{E_i | i < \omega\}$.
1. Ecrire les énoncés qui disent que pour tout $i < \omega$, E_i est une relation d'équivalence, que E_0 n'a qu'une seule classe et que les classes de E_{i+1} sont obtenues en divisant chaque E_i-classe en exactement deux classes infinies.
2. Montrer que la structure suivante est un modèle dénombrable des énoncés du premier point :

$$\mathcal{M}_0 = (\{f \in 2^\omega | \text{il existe } i < \omega \text{ tel que pour tout } j \geq i,\ f(i) = f(j).\ \}\ ; E_i(x_1, x_2)\ (i < \omega))\ ,$$

où pour tout $i \in \omega$, $(\sigma_1, \sigma_2) \in E_i^{\mathcal{M}_0}$ si et seulement si $\sigma_1 \lceil i = \sigma_2 \lceil i$.

Le point 2 montre que les énoncés du premier point forment un ensemble consistant. Ces énoncés et leurs conséquences seront notés T.

Attention, à partir de maintenant l'exercice devient plus difficile... mais enrichissant !

3. Nous dirons qu'on modèle $\mathcal{M}$ de T est *riche* si pour tout $\sigma \in M$ il existe une infinité de $\theta \in M$ tel que $\mathcal{M} \models E_i(\sigma, \theta)$ pour tout $i < \omega$. *Nous montrerons que deux modèles riches de T sont élémentairement équivalents.*
Comme vous connaissez la notion d'extension élémentaire et que vous aurez vu la preuve du théorème de Löwenheim-Skolem ascendant avant d'aborder cet exercice, démontrez l'énoncé suivant :

tout modèle de T a une extension élémentaire riche de même cardinal que lui.

4. Cette étape est une illustration de la méthode de va-et-vient en utilisant un modèle riche. Plus précisément nous effectuerons un "va", le "vient" étant symétrique. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles dont $\mathcal{N}$ est riche. Fixons $k \in \mathbb{N}$, supposons que $(a_1, \ldots, a_k)$ et $(b_1, \ldots, b_k)$ soient deux k-uplets extraits de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ respectivement et soumis aux conditions suivantes : pour toute paire (k_1, k_2) avec $1 \leq k_1, k_2 \leq k$, pour tout $i < \omega$,

1. $\mathcal{M} \models E_i(a_{k_1}, a_{k_2})$ si et seulement si $\mathcal{N} \models E_i(b_{k_1}, b_{k_2})$;
2. $a_{k_1} = a_{k_2}$ si et seulement si $b_{k_1} = b_{k_2}$.

Montrer que si $\alpha \in M$ est arbitrairement choisi alors il existe $\beta \in N$ tel que $(a_1, \ldots, a_k, \alpha)$ et $(b_1, \ldots, b_k, \beta)$ satisfassent les mêmes conditions.

5. Déduire du point (4) par une récurrence sur la complexité des formules que deux modèles riches de cardinaux arbitraires sont élémentairement équivalents. Conclure que T est une théorie complète.
6. Montrer qu'il n'y a à isomorphisme près qu'un seul modèle riche dénombrable.
7. Montrer que T élimine les quantificateurs : pour toute formule $\phi(x_1, \ldots, x_l)$ ($l \in \mathbb{N}^*$) du premier ordre à exactement l variables dans le langage $\mathcal{L}$, il existe une formule $\psi(x_1, \ldots, x_l)$ avec les mêmes variables libres telle que $T \vdash \big(\forall x_1 \ldots x_l \, \psi(x_1, \ldots, x_l) \ \leftrightarrow \phi(x_1, \ldots, x_l)\big)$.
8. Montrer qu'un modèle de T est riche si et seulement s'il est ω-saturé.