STÉPHANE ATTAL

Représentation des endomorphismes de l'espace de Wiener qui préservent les martingales

Annales de l'I. H. P., section B, tome 31, n° 3 (1995), p. 467-484.

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1995__31_3_467_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 31, n° 3, 1995, p. 467-484. *Probabilités et Statistiques*

Représentation des endomorphismes de l'espace de Wiener qui préservent les martingales

par

Stéphane ATTAL

Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.,
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France.

RÉSUMÉ. – Sur l'espace de Wiener $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on appelle endomorphisme une application $\tilde{T}$ de Ω dans lui-même qui préserve la mesure P, *i.e.* qui transforme le mouvement brownien canonique $(W_t)_{t \geqq 0}$ en un autre mouvement brownien $(\tilde{W}_t)_{t \geqq 0}$. Parmi ces endomorphismes nous étudions ceux tels que $\tilde{W}$ est une martingale pour la filtration naturelle $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geqq 0}$ de W.

L'opérateur T de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans lui-même, défini par $TF = F \circ \tilde{T}$, est alors une isométrie et un morphisme de l'algèbre $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$, il commute avec les espérances conditionnelles $\mathbb{E}_t = \mathbb{E}[\,.\,|\mathcal{F}_t]$, pour tout t.

Au moyen du calcul stochastique non commutatif sur l'espace de Fock nous allons étudier ces opérateurs et en donner une caractérisation simple. Nous allons voir que les conditions de commutation et de morphisme suffisent à assurer qu'un opérateur borné non nul T provient d'un endomorphisme $\tilde{T}$ of $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui préserve les martingales. Enfin une condition nécessaire et suffisante pour que $\tilde{T}$ soit inversible sera obtenue.

ABSTRACT. – On Wiener space $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, we call an endomorphism an application $\tilde{T}$ from Ω into itself which preserves the measure P, *i.e.* which transforms the canonical Brownian motion $(W_t)_{t \geqq 0}$ into another Brownian motion $(\tilde{W}_t)_{t \geqq 0}$. Among these endomorphisms we study those such that $\tilde{W}$ is a martingale for the natural filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geqq 0}$ of W.

The operator T from $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ into itself defined by $TF = F \circ \tilde{T}$ is an isometry and a morphism of the algebra $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$, it commutes with the conditional expectations $\mathbb{E}_t = \mathbb{E}[\,.\,|\mathcal{F}_t]$, for every t.

Using non-commutative stochastic calculus on the Fock space we will study these operators and give a simple characterization of them. We will see that commutation and morphism conditions are sufficient to ensure that a bounded non null operator T is the isometry associated to an endomorphism $\tilde{T}$ of $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ which preserves the martingales. Finally, a necessary and sufficient condition for $\tilde{T}$ to be invertible will be obtained.

I. INTRODUCTION

Notations

Tous les espaces vectoriels considérés seront réels.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'espace de Wiener, $(W_t)_{t \geqq 0}$ le mouvement brownien canonique, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geqq 0}$ sa filtration naturelle, $\mathbb{E}_t = \mathbb{E}[\,.\,|\mathcal{F}_t]$, $t \in \mathbb{R}^+$. Soit $(\mathcal{G}_t)_{t \geqq 0}$ la filtration des accroissements futurs de W, c'est-à-dire $\mathcal{G}_t = \sigma(W_s - W_t;\, s \geqq t)$. Nous noterons Φ l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, il est isomorphe à l'espace de Fock symétrique sur $L^2(\mathbb{R}^+)$. Le produit scalaire de Φ sera noté $\langle ., . \rangle$, sa norme $\|\,.\,\|$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, nous noterons $\Phi_{t]} = L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$, et $\Phi_{[t} = L^2(\Omega, \mathcal{G}_t, P)$. Grâce à l'indépendance des accroissements du mouvement brownien, on a la structure de produit tensoriel continu : $\Phi = \Phi_{t]} \otimes \Phi_{[t}$, (*cf.* [5]).

Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$, appelons

$$\varepsilon(f) = \exp\left(\int_0^\infty f(s)\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty f^2(s)\, ds\right)$$

l'exponentielle stochastique de la variable aléatoire $\displaystyle\int_0^\infty f(s)\, dW_s$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, posons $f_{t]} = f\,\mathbf{1}_{[0,t]}$ et $f_{[t} = f\,\mathbf{1}_{[t,+\infty[}$. Enfin $\mathcal{E}$ sera l'espace des combinaisons linéaires finies de vecteurs $\varepsilon(f)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$. Rappelons que $\mathcal{E}$ est un sous-espace dense de Φ.

Quelques éléments de calcul stochastique non commutatif

Nous ne présenterons ici que les outils dont nous aurons besoin. Pour une présentation plus complète du sujet on se référera à l'article original de Hudson & Parthasarathy [4] ou au livre de Meyer [6].

Une famille d'opérateurs $(H_t)_{t \geqq 0}$ de Φ dans Φ, définis sur $\mathcal{E}$, sera un *processus adapté* d'opérateurs si, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$, l'application $t \mapsto H_t \varepsilon(f_{t]})$ est fortement mesurable dans Φ et si, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{cases} H_t \varepsilon(f_{t]}) \in \Phi_{t]} \\ H_t \varepsilon(f) = [H_t \varepsilon(f_{t]})] \varepsilon(f_{[t}). \end{cases}$$

Un processus adapté d'opérateurs $(M_t)_{t \geqq 0}$ sera une *martingale d'opérateurs* si, pour tout $s \leqq t$, f, $g \in L^2(\mathbb{R}^+)$,

$$\langle \varepsilon(f_{s]}), M_t \varepsilon(g_{s]}) \rangle = \langle \varepsilon(f_{s]}), M_s \varepsilon(g_{s]}) \rangle.$$

Si T est un opérateur sur Φ, défini sur $\mathcal{E}$, la famille $(T_t)_{t \geqq 0}$, définie par

$$T_t \varepsilon(f) = [\mathbb{E}_t T \varepsilon(f_{t]})] \varepsilon(f_{[t}), \qquad t \in \mathbb{R}^+, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^+),$$

est une martingale d'opérateurs, appelée *martingale associée* à T.

Les trois martingales particulières de création, annihilation et nombre, seront respectivement notées $(A_t^\dagger)_{t \geqq 0}$, $(A_t)_{t \geqq 0}$, $(\Lambda_t)_{t \geqq 0}$, elles sont définies par

$$\langle \varepsilon(f), A_t^\dagger \varepsilon(g) \rangle = \langle \varepsilon(f), \varepsilon(g) \rangle \int_0^t f(s)\, ds$$

$$\langle \varepsilon(f), A_t \varepsilon(g) \rangle = \langle \varepsilon(f), \varepsilon(g) \rangle \int_0^t g(s)\, ds$$

$$\langle \varepsilon(f), \Lambda_t \varepsilon(g) \rangle = \langle \varepsilon(f), \varepsilon(g) \rangle \int_0^t f(s)\, g(s)\, ds,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, f, $g \in L^2(\mathbb{R}^+)$.

Si $(H_t)_{t \geqq 0}$, $(K_t)_{t \geqq 0}$, $(L_t)_{t \geqq 0}$ sont des processus adaptés d'opérateurs vérifiant, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$, $t \in \mathbb{R}^+$,

$$(1) \qquad \int_0^t \|L_s \varepsilon(f)\|^2 + \|K_s \varepsilon(f)\|^2 + |f(s)|^2 \|H_s \varepsilon(f)\|^2\, ds < \infty$$

alors la famille des intégrales stochastiques non commutatives

$$T_t = \int_0^t H_s\, d\Lambda_s + \int_0^t L_s\, dA_s + \int_0^t K_s\, dA_s^\dagger, \qquad t \in \mathbb{R}^+,$$

est bien définie sur $\mathcal{E}$, comme une martingale d'opérateurs, vérifiant, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^+)$,

$$(2) \quad \langle \varepsilon(f), T_t \varepsilon(g) \rangle = \int_0^t \langle \varepsilon(f), f(s)\, g(s)\, H_s \varepsilon(g) + g(s)\, L_s \varepsilon(g) + f(s)\, K_s \varepsilon(g) \rangle\, ds.$$

L'intégrale stochastique non commutative T_t, peut être définie pour $t = +\infty$ de la même façon, si (1) est vérifié pour $t = +\infty$. On vérifie alors facilement que la martingale d'opérateurs associée à $\int_0^\infty H_s\, d\Lambda_s + \int_0^\infty L_s\, dA_s + \int_0^\infty K_s\, dA_s^\dagger$ est le processus $(T_t)_{t \geqq 0}$, comme défini plus haut.

Dans la suite, chaque fois qu'une intégrale de ce type apparaîtra, nous supposerons que les processus H, K et L vérifient (1).

Extension des intégrales stochastiques non commutatives

Supposons que T soit un opérateur borné sur Φ défini sur $\mathcal{E}$, et par extension sur tout Φ, tel que, sur $\mathcal{E}$,

$$T = \int_0^\infty H_s\, d\Lambda_s + \int_0^\infty L_s\, dA_s + \int_0^\infty K_s\, dA_s^\dagger,$$

où H, K, L sont des processus d'opérateurs bornés. La définition (2) de ces intégrales ne nous permet pas de les étendre hors du domaine $\mathcal{E}$.

Comme nous voulons étudier des opérateurs bornés, définis sur tout Φ, nous allons utiliser l'extension de la notion d'intégrale stochastique non commutative donnée dans [2].

Tout $F \in \Phi$ admet une représentation prévisible

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^\infty \dot{F}_s\, dW_s.$$

Posons $F_t = \mathbb{E}_t F$, $F_\infty = F$ et

$$T_t = \int_0^t H_s\, d\Lambda_s + \int_0^t L_s\, dA_s + \int_0^t K_s\, dA_s^\dagger,\ t \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Dans [7] il est montré que, si F est dans l'espace $\mathcal{E}_{lb}$ engendré par les $\varepsilon(f)$, pour f dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ et f localement bornée, on a, pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\begin{aligned} T_t F_t = &\int_0^t T_s \dot{F}_s\, dW_s + \int_0^t H_s \dot{F}_s\, dW_s \\ &+ \int_0^t L_s \dot{F}_s\, ds + \int_0^t K_s F_s\, dW_s. \end{aligned} \tag{3}$$

Sur $\mathcal{E}_{lb}$, cette formule est équivalente à (2), mais elle a l'avantage d'avoir encore un sens pour toute F dans Φ [contrairement à (2)].

DÉFINITION. – Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ une martingale d'opérateurs bornés sur Φ, soit $(H_t)_{t\geq 0}$, $(K_t)_{t\geq 0}$ et $(L_t)_{t\geq 0}$ des processus adaptés bornés, nous dirons que

$$T_t = \int_0^t H_s\, d\Lambda_s + \int_0^t L_s\, dA_s + \int_0^t K_s\, dA_s^\dagger, \qquad t \geq 0$$

sur tout Φ, *si* (3) est vérifiée pour tout $F \in \Phi$.

Cette définition provient d'un point de vue de Meyer, *cf.* [6], sur les intégrales stochastiques d'opérateurs. Il demande qu'une telle intégrale d'opérateurs appliquée à un vecteur de Φ satisfasse, en un certain sens, une formule d'intégration par partie du type Ito. On renvoie à [2] pour une présentation plus complète de cette extension, en particulier pour l'unicité de T_t lorsque H, K et L sont donnés.

II. OPÉRATEUR ASSOCIÉ À UN ENDOMORPHISME PRÉSERVANT LES MARTINGALES

Présentation et premières propriétés

Une application mesurable $\tilde{T} : \Omega \to \Omega$ est un *endomorphisme* si elle préserve la mesure P. Dans ce cas, si nous définissons, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la variable aléatoire $\tilde{W}_t(\omega) = W_t(\tilde{T}\omega)$, le processus $(\tilde{W}_t)_{t\geqq 0}$ est un mouvement brownien.

Un endomorphisme $\tilde{T}$ sera dit *préserver les martingales* si $\tilde{W}$ est un mouvement brownien pour la filtration $\mathcal{F}$ (cette terminologie sera justifiée par la proposition 1). Dans ce cas, $\tilde{W}$ est une $\mathcal{F}$-martingale de crochet t, elle admet donc une représentation prévisible de la forme $\tilde{W}_t = \int_0^t k_s\, dW_s$, où $(k_t)_{t\geq 0}$ est un processus prévisible tel que $k_t^2(\omega) = 1$, pour presque tout (t, ω). Il est clair que $\tilde{T}$ est entièrement déterminé par k.

Soit $\tilde{T}$ un endomorphisme, on peut définir sur Φ l'opérateur linéaire $T : F \mapsto F \circ \tilde{T}$. Cet opérateur vérifie :

(i) T est une isométrie (T est unitaire ssi $\tilde{T}$ admet une version inversible).

(ii) $T(FG) = (TF)(TG)$, pour tous F, $G \in \Phi$ tels que $FG \in \Phi$.

De quelle façon la propriété « $\tilde{T}$ préserve les martingales » se représente-t-elle sur l'opérateur T?

PROPOSITION 1. – *Soit T une isométrie de Φ associée à un endomorphisme $\tilde{T}$ de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\tilde{T}$ *préserve les martingales.*

(ii) *Pour toute $\mathcal{F}$-martingale $(F_t)_{t\geq 0}$, $(TF_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}$-martingale.*

(iii) $T\,\mathbb{E}_t = \mathbb{E}_t\,T$, *pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$.

Démonstration. – (i) $\Rightarrow$ (iii).

L'égalité $T\,\mathbb{E}_t = \mathbb{E}_t\,T$ peut être vérifiée sur une famille totale, par exemple les $\varepsilon(f)$ où f est une combinaison linéaire d'indicatrices d'intervalles bornés. On a dans ce cas

$$\begin{aligned} TF &= \exp\left[\int_0^\infty f(s)\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty f^2(s)\,ds\right] \circ \tilde{T} \\ &= \exp\left[\int_0^\infty f(s)\,d\tilde{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty f^2(s)\,ds\right] \end{aligned}$$

(car l'intégrale s'explicite comme une somme finie);

$$TF = \exp\left[\int_0^\infty f(s)\,k_s\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty f^2(s)\,ds\right]$$

(en vertu de la forme de la représentation prévisible de $\tilde{W}$ quand $\tilde{T}$ préserve les martingales). Le vecteur $\mathbb{E}_t\,TF$, obtenu en remplaçant ∞ par t dans cette expression, coïncide avec $T\,\mathbb{E}_t\,F$, obtenu en remplaçant f par $f_{t]}$.

Les implications (iii) $\Rightarrow$ (ii) et (ii) $\Rightarrow$ (i) ne présentent aucune difficulté. ■

Lorsque T est un opérateur sur Φ associé à un endomorphisme $\tilde{T}$ préservant les martingales (représenté par un processus prévisible k de carré égal à 1), il est naturel de se demander à quoi correspond la martingale d'opérateurs $(T_t)_{t\geq 0}$ associée à T. Chaque opérateur T_t est en fait aussi un opérateur sur Φ associé à un endomorphisme $\tilde{T}_t$ préservant les martingales, défini, pour tout $s,\, t \in \mathbb{R}^+$ par

$$\tilde{T}_t\,W_s = \int_0^s k_u^t\,dW_u, \qquad \text{où} \quad k_u^t = \begin{cases} k_u & \text{si } u \leq t \\ 1 & \text{si } u > t \end{cases}$$

(c'est-à-dire que $\tilde{T}_t$ est la « la même transformation que $\tilde{T}$ sur $[0,\, t]$ et l'identité sur $[t,\, +\infty[$ »).

En effet, soit T_t' l'opérateur sur Φ associé à un tel endomorphisme. Prenons un $F = \varepsilon(f)$ du même type que dans la démonstration de la proposition 1. Il est facile de voir, en utilisant le même genre de calcul, que $T_t'\,F_t = TF_t$. Soit $F_{[t} = \varepsilon(f_{[t})$, de la même façon que précédemment on peut voir que $T_t'\,F_{[t} = F_{[t}$. Comme T_t' est multiplicatif (en tant qu'opérateur associé à un endomorphisme),

$$\begin{aligned} T_t'\,\varepsilon(f) &= [T_t'\,\varepsilon(f_{t]})]\,[T_t'\,\varepsilon(f_{[t})] = [T\,\varepsilon(f_{t]})]\,\varepsilon(f_{[t}) \\ &= [T\,\mathbb{E}_t\,\varepsilon(f_{t]})]\,\varepsilon(f_{[t}) = [\mathbb{E}_t\,T\,\varepsilon(f_{t]})]\,\varepsilon(f_{[t}). \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $(T_t')_{t\geq 0}$ est la martingale associée à T. ■

Il est important de rappeler ici une propriété facile.

LEMME 2. – *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé, soit* T *un opérateur borné non nul sur* $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *tel que* $T(FG) = (TF)(TG)$, *pour tous* F, G *dans* $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *vérifiant* $FG \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Si* T *commute avec l'opérateur d'espérance* $\mathbb{E}$ *alors* T *est une isométrie de* $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Démonstration. – Si T commute avec l'opérateur d'espérance $\mathbb{E}$, on a $T1 = T\mathbb{E}1 = \mathbb{E}T1$. Donc $T1 \in \mathbb{R}$. Mais la propriété de multiplicativité implique que $(T1)^2 = T1$, ainsi $T1 = 0$ ou 1. Comme pour tout F on a $TF = (T1)(TF)$, la non nullité de T entraîne que $T1 = 1$.

Maintenant, pour tous F, G dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tels que FG soit aussi dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$,

$$\begin{aligned}\langle TF, TG\rangle &= \mathbb{E}[(TF)(TG)] = \mathbb{E}[T(FG)] = T\,\mathbb{E}[FG] \\ &= (\mathbb{E}[FG])\,T1 = \mathbb{E}[FG] = \langle F, G\rangle. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Finalement, les opérateurs T sur l'espace de Fock issus d'un endomorphisme préservant les martingales vérifient :

(i) $T(FG) = (TF)(TG)$, pour tous F, $G \in \Phi$ tels que $FG \in \Phi$.

(ii) $T\mathbb{E}_t = \mathbb{E}_t T$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

(iii) (T est une isométrie).

Remarque. – *A priori*, il n'est pas clair que ces propriétés caractérisent complètement les opérateurs associés à un endomorphisme préservant les martingales. Si on remplace la condition (iii) par l'unitarité de T, on caractérise alors tous les endomorphismes *inversibles* qui préservent les martingales (par [3] et Proposition 1). Dans le cas où l'opérateur est seulement isométrique ces conditions n'assurent pas, *a priori*, qu'il provient d'une transformation de l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui préserve la mesure.

Dans la suite nous allons établir que de tels opérateurs sur Φ sont représentables en intégrales stochastiques non commutatives *i.e.*

$$T = \lambda I + \int_0^\infty H_s\, d\Lambda_s + \int_0^\infty L_s\, dA_s + \int_0^\infty K_s\, dA_s^\dagger,$$

les caractériser par des propriétés de H, L et K seuls et en déduire que les conditions (i) et (ii) sont non seulement nécessaires, mais aussi suffisantes pour que T provienne d'un endomorphisme qui préserve les martingales.

Caractérisation de la propriété de commutation avec les espérances conditionnelles

Dans [1] (théorème III.1) figure le résultat suivant.

THÉORÈME 3. – *Soit T un opérateur borné sur Φ. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $T\mathbb{E}_t = \mathbb{E}_t T, \forall t \in \mathbb{R}^+$

(ii) *Il existe un processus adapté $(H_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs bornés, et $\lambda \in \mathbb{R}$, tels que*

$$T = \lambda I + \int_0^\infty H_s \, d\Lambda_s, \quad \textit{sur tout } \Phi. \quad \blacksquare$$

Par (3) on voit facilement que dans ce cas $\lambda = T1$. Donc, comme corollaire immédiat, si T est un opérateur associé à un endomorphisme $\tilde{T}$ préservant les martingales, il existe un processus adapté $(H_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs bornés tel que, sur tout Φ, $T = I + \int_0^\infty H_s \, d\Lambda_s$.

De plus, les remarques faites précédemment sur la martingale $(T_t)_{t\geq 0}$ associée à T (qui est, rappelons-le, la famille des opérateurs associés aux endomorphismes $\tilde{T}_t$ comme définis précédemment) et sur la martingale associée à une intégrale stochastique non commutative en général, entraînent que $T_t = I + \int_0^t H_s \, d\Lambda_s$.

Caractérisation de la propriété de multiplicativité

Nous allons dans cette section donner deux caractérisations des opérateurs qui rentrent dans le cadre du théorème 3 et qui vérifient aussi la propriété de multiplicativité [ou si l'on préfère, la propriété de morphisme de l'algèbre $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$]. Bien qu'il ne soit pas présenté comme le résultat principal, il s'agit là du théorème clef de cet article.

THÉORÈME 4. – *Soit T un opérateur borné sur Φ, qui commute avec les $\mathbb{E}_t$, $t \in \mathbb{R}^+$ et tel que $T1 = 1$. Donc, $T = I + \int_0^\infty H_s \, d\Lambda_s$, sur tout Φ. Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ la martingale qui lui est associée. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $T(FG) = (TF)(TG)$, *pour tous F, $G \in \Phi$ tels que $FG \in \Phi$.*

(ii) *Pour presque tout t, $H_t = (H_t 1) T_t$ et $H_t 1$ est à valeurs dans $\{0, -2\}$.*

(iii) *Pour presque tout t, pour tous F, G dans Φ, tels que FG soit dans Φ,*

$$H_t(FG) = -\frac{1}{2}(H_t F)(H_t G),$$

et, pour presque tout $s \leq t$,

$$H_t W_s = (H_t 1) \int_0^s (1 + H_u 1) \, dW_u.$$

Remarque 1. – La deuxième propriété que l'on requiert pour H dans (iii) n'est pas aussi forte qu'il y paraît. En effet, si H_t vérifie $H_t(FG) = -1/2\,(H_t F)(H_t G)$, on a *formellement*

$$(H_t\, dW_s)^2 = -2\, H_t\, (dW_s)^2 = -2\, H_t\, (ds) = -2\,(H_t 1)\, ds$$
$$= (H_t 1)^2\, ds = ((H_t 1)\, dW_s)^2,$$

c'est-à-dire $H_t W_s = (H_t 1)\int_0^s F_{u,t}\, dW_u$, où $F_{u,t}^2 = 1$ pour presque tout u. Ainsi la seconde condition précise seulement que cet élément $F_{u,t}$ tel que $F_{u,t}^2 = 1$ est $1 + H_u 1$.

Remarque 2. – Il est assez surprenant que la propriété de morphisme de $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pour T se traduise par la même propriété (à un coefficient moins 1/2 près) pour sa « dérivée » $(H_t)_{t\geq 0}$. Il serait intéressant d'avoir une explication intuitive de ce résultat.

Remarque 3. – C'est l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) qui est la plus utile dans pratique, mais elle ne permet pas, pour un processus d'opérateurs H donné, de savoir si l'opérateur $I + \int_0^\infty H_t\, d\Lambda_t$ est multiplicatif ou non. En effet, la condition (ii) est donnée comme une équation différentielle stochastique non commutative et non pas par une propriété de H seulement. C'est la condition (iii) qui remplit ce rôle.

Démonstration du théorème. – Nous allons démontrer ce théorème en montrant d'abord que (i) est équivalent à (ii), puis que (ii) est équivalent à (iii).

Soit $T = I + \int_0^\infty H_s\, d\Lambda_s$, sur tout Φ. Soit $F = \mathbb{E}[F] + \int_0^\infty \dot{F}_s\, dW_s \in \Phi$. Alors, par (3), en posant $\eta_t = T_t + H_t$,

$$\begin{aligned} TF &= F + \int_0^\infty \left(\int_0^t H_s\, d\Lambda_s\right) \dot{F}_t\, dW_t + \int_0^\infty H_t\, \dot{F}_t\, dW_t \\ &= F + \int_0^\infty (T_t - I)\, \dot{F}_t\, dW_t + \int_0^\infty H_t\, \dot{F}_t\, dW_t \\ &= F - \int_0^\infty \dot{F}_t\, dW_t + \int_0^\infty (T_t + H_t)\, \dot{F}_t\, dW_t \\ &= \mathbb{E}[F] + \int_0^\infty \eta_t\, \dot{F}_t\, dW_t. \end{aligned}$$

Supposons que $F^2 \in \Phi$, soit $F_t = \mathbb{E}_t F$, $F_\infty = F$, alors, $\forall\, t \in \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$F_t^2 = \mathbb{E}[F]^2 + 2\int_0^t \dot{F}_s\, F_s\, dW_s + \int_0^t \dot{F}_s^2\, ds,$$

donc

$$(\star) \qquad T(F_t^2) = \mathbb{E}[F]^2 + 2\int_0^t \eta_s (\dot{F}_s F_s)\, dW_s + T\left(\int_0^t \dot{F}_s^2\, ds\right)$$

$$= \mathbb{E}[F]^2 + 2\int_0^t \eta_s (\dot{F}_s F_s)\, dW_s + \int_0^t T\left(\dot{F}_s^2\right) ds.$$

Par ailleurs

$$(\star\star) \quad (TF_t)^2 = \mathbb{E}[F]^2 + 2\int_0^t (\eta_s \dot{F}_s)(\mathbb{E}_s TF_t)\, dW_s + \int_0^t (\eta_s \dot{F}_s)^2\, ds$$

$$= \mathbb{E}[F]^2 + 2\int_0^t (\eta_s \dot{F}_s)(TF_s)\, dW_s + \int_0^t (\eta_s \dot{F}_s)^2\, ds.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii).

Si, pour tout $F \in \Phi$, tel que $F^2 \in \Phi$, on a $T(F_t^2) = (TF_t)^2$, pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, alors en identifiant $(\star)$ et $(\star\star)$, on obtient entre autres $(\eta_t \dot{F}_t)^2 = T_t(\dot{F}_t^2)$, pour presque tout $t \in \mathbb{R}^+$. Ce qui, après polarisation, s'écrit $(\eta_t \dot{F}_t)(\eta_t \dot{G}_t) = T(\dot{F}_t \dot{G}_t)$. En prenant $F = W_{t+1}$, donc $\dot{F}_t = 1$, on trouve $(\eta_t 1)(\eta_t \dot{G}_t) = T(\dot{G}_t)$, que l'on peut aussi écrire sous la forme $\eta_t \dot{G}_t = (\eta_t 1)(T\dot{G}_t)$ car, en prenant aussi G tel que $\dot{G}_t = 1$, on a

$$(4) \qquad (\eta_t 1)^2 = T_t 1 = 1.$$

Si $G = \varepsilon(g)$, pour un $g \in L^2(\mathbb{R}^+)$, alors $\dot{G}_t = g(t)\,\varepsilon(g_{t]})$ et ainsi

$$g(t)\, \eta_t\, \varepsilon(g_{t]}) = g(t)\,(\eta_t 1)(T_t\, \varepsilon(g_{t]})).$$

Soit D un sous-ensemble dénombrable dense de $L^2(\mathbb{R}^+)$, ne contenant que des fonctions ne s'annulant jamais. Le sous-espace $\mathcal{E}_D$ de $\mathcal{E}$ engendré par les $\varepsilon(g)$, $g \in D$, est dense dans $\mathcal{E}$, donc dans Φ. Si $g \in D$, nous avons alors, grâce à l'égalité précédente, $\eta_t\, \varepsilon(g_{t]}) = (\eta_t 1)(T_t\, \varepsilon(g_{t]}))$, donc sur $\mathcal{E}_D$,

$$H_t = (\eta_t 1 - 1)\, T_t = (H_t 1 + T1 - 1)\, T_t = (H_t 1)\, T_t.$$

On conclut à la même égalité sur tout Φ par densité de $\mathcal{E}_D$ dans Φ et par bornitude des opérateurs en jeu.

D'autre part, l'égalité (4) implique aussi $(H_t 1)^2 = -2\, H_t 1$, *i.e.* $H_t 1$ est à valeur dans $\{0, -2\}$. Ce qui achève de montrer (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i).

Si $H_t = (H_t\,1)\,T_t$, pour presque tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\eta_t = (1 + H_t\,1)\,T_t = (\eta_t\,1)\,T_t$. Si de plus $H_t\,1$ est à valeur dans $\{0, -2\}$, nous avons $(H_t\,1)^2 = -2\,H_t\,1$ et $(\eta_t\,1)^2 = 1$. Ainsi $(\star)$ s'écrit

$$\begin{aligned} T\left(F^2\right) &= \mathbb{E}\,[F]^2 + 2\int_0^\infty (\eta_t\,1)\,T_t\,(\dot{F}_t\,F_t)\,dW_t + \int_0^\infty T\left(\dot{F}_t^2\right)dt \\ &= \mathbb{E}\,[F]^2 + 2\int_0^\infty (\eta_t\,1)\,T\,(\dot{F}_t\,F_t)\,dW_t + \int_0^\infty T\left(\dot{F}_t^2\right)dt. \end{aligned}$$

En polarisant on obtient

$$\begin{aligned} (5)\qquad T\,(FG) =&\,\mathbb{E}\,[F]\,\mathbb{E}\,[G] + \int_0^\infty (\eta_t\,1)\,T\,(\dot{F}_t\,G_t)\,dW_t \\ &+ \int_0^\infty (\eta_t\,1)\,T\,(\dot{G}_t\,F_t)\,dW_t \\ &+ \int_0^\infty T\,(\dot{F}_t\,\dot{G}_t)\,dt. \end{aligned}$$

De la même façon, $(\star\star)$ s'écrit

$$\begin{aligned} (TF)^2 &= \mathbb{E}\,[F]^2 + \int_0^\infty ((\eta_t\,1)\,T\dot{F}_t)\,TF_t\,dW_t + \int_0^\infty ((\eta_t\,1)\,T\dot{F}_t)^2\,dt \\ &= \mathbb{E}\,[F]^2 + \int_0^\infty (\eta_t\,1)\,[(T\dot{F}_t)\,(TF_t)]\,dW_t + \int_0^\infty \left(T\dot{F}_t\right)^2 dt. \end{aligned}$$

En polarisant on obtient

$$\begin{aligned} (6)\qquad (TF)\,(TG) =&\,\mathbb{E}\,[F]\,\mathbb{E}\,[G] + \int_0^\infty (\eta_t\,1)\,[(T\dot{F}_t)\,(TG_t)]\,dW_t \\ &+ \int_0^\infty (\eta_t\,1)\,[(T\dot{G}_t)\,(TF_t)]\,dW_t \\ &+ \int_0^\infty (T\dot{G}_t)\left(T\dot{F}_t\right)dW_t. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\widehat{L^2\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$ l'espace des éléments de $L^2\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ qui sont symétriques. Pour tout $f_n \in \widehat{L^2\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$, on note $I_n\,(f_n)$ l'élément du n-ième chaos de Wiener associé :

$$I_n\,(f_n) = \int_0^\infty \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} f_n\,(t_1, \dots, t_n)\,dW_{t_1} \dots dW_{t_n}.$$

En posant $F = I_n(f_n)$ et $G = I_m(f_m)$, en remarquant que $\dot{F}_t = I_{n-1}(f_n(\,.\,, t)\,1_{[0,t]})$, et de même pour $\dot{G}_t$, nous voyons, par comparaison de (5) et de (6), que démontrer la formule

$$\begin{aligned}P(n, m) = \text{« pour tout } f_n \in L^2\left(\widehat{\mathbb{R}^n_+}\right), \; f_m \in L^2\left(\widehat{\mathbb{R}^m_+}\right),\\ T(I_n(f_n)\, I_m(f_m)) = T(I_n(f_n))\, T(I_m(f_m)) \text{»}\end{aligned}$$

se ramène à établir $P(n, m-1)$, $P(n-1, m)$ et $P(n-1, m-1)$.

Comme $P(0, n)$ et $P(n, 0)$ sont trivialement vraies pour tout $n \in \mathbb{N}$, on conclut par récurrence que $P(n, m)$ est vraie pour tout $n, m \in \mathbb{N}$.

Enfin, T est multiplicatif sur tout Φ, par densité des sommes finies de chaos dans Φ et par bornitude de T.

Ainsi nous avons l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

Si T vérifie (ii), $T_t = I + \int_0^t H_s\, d\Lambda_s$, avec $H_t = (H_t 1)\, T_t$, et $H_t 1$ à valeurs dans $\{0, -2\}$, pour presque tout t. Rappellons qu'alors $(1 + H_t 1)^2 = 1$. Donc, pour tout F, G dans Φ tels que FG soit aussi dans Φ,

$$\begin{aligned}(H_t F)(H_t G) &= [(H_t 1)\, T_t F]\, [(H_t 1)\, T_t G]\\ &= [(1 + H_t 1 - 1)\, T_t F]\, [(1 + H_t 1 - 1)\, T_t G]\\ &= [(1 + H_t 1)\, T_t F]\, [(1 + H_t 1)\, T_t G]\\ &\quad - (T_t F)\, [(1 + H_t 1)\, T_t G]\\ &\quad - [(1 + H_t 1)\, T_t F]\, (T_t G) + (T_t F)\, (T_t G)\\ &= 2\, (T_t F)\, (T_t G) - 2\, (1 + H_t 1)\, [(T_t F)\, (T_t G)].\end{aligned}$$

Mais nous avons comme corollaire immédiat de l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii), que, dans ce contexte, si T est multiplicatif, alors T_t l'est aussi, pour presque tout t. En effet, T_t vérifie aussi (ii) avec un processus $(H_s^t)_{s \geq 0}$ défini par $H_s^t = H_s$ si $s \leq t$, $H_s^t = 0$ sinon. Par conséquent

$$\begin{aligned}(H_t F)(H_t G) &= 2\, T_t\, (FG) - 2\, (1 + H_t 1)\, T_t\, (FG)\\ &= -2\, (H_t 1)\, T_t\, (FG)\\ &= -2\, H_t\, (FG).\end{aligned}$$

Ce qui donne la première condition sur $(H_t)_{t \geq 0}$.

On a de plus

$$\begin{aligned} H_t\, W_s &= (H_t\, 1)\, T_t\, W_s \\ &= (H_t\, 1) \int_0^s (T_u + H_u)\, 1\, dW_u, \quad \text{[par (3)]} \\ &= (H_t\, 1) \int_0^s (1 + H_u\, 1)\, dW_u. \end{aligned}$$

Ce qui achève de prouver (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

Par la propriété de multiplicativité sur $(H_t)_{t \geq 0}$, on a $(H_t\, 1)^2 = -2\, H_t\, 1$, donc, $H_t\, 1$ est à valeurs dans $\{0, -2\}$.

Pour prouver que $H_t = (H_t\, 1)\, T_t$ sur tout Φ, nous allons tout d'abord montrer un lemme permettant de le prouver par récurrence sur les différents chaos de Φ.

LEMME 5. – *Soit* $F_t = \int_0^t \dot{F}_s\, dW_s$, *avec* $\dot{F}_s = U_a\, 1_{[a,\, b]}\,(s)$, *pour un* $U_a \in \Phi_{a]}$, $a \leq b \leq t$. *Si* $H_s\, U_a = (H_s\, 1)\, T_s\, U_a$, *pour tout* $a \leq s \leq t$, *alors* $H_t\, F_t = (H_t\, 1)\, T_t\, F_t$.

Démonstration. – Sous les hypothèses du lemme on a

$$H_t\, F_t = H_t\, (U_a\, (W_b - W_a)) = -\frac{1}{2}\, (H_t\, U_a)\, (H_t\, (W_b - W_a)).$$

Par hypothèse sur U_a et sur $H_t\, W_s$, $s \leq t$, on a

$$\begin{aligned} H_t\, F_t &= -\frac{1}{2}\, [(H_t\, 1)\, T_t\, U_a] \left[(H_t\, 1) \int_a^b (1 + H_u\, 1)\, dW_u \right] \\ &= -\frac{1}{2}\, (H_t\, 1)^2 \left[(T_t\, U_a) \int_a^b (1 + H_u\, 1)\, dW_u \right] \end{aligned}$$

Comme $(T_t)_{t \geq 0}$ est une martingale d'opérateurs qui commutent tous avec les $\mathbb{E}_s$ (théorème 3), nous avons toujours, pour $U_a \in \Phi_{a]}$, pour tout $t \geq a$, $T_t\, U_a = T_a\, U_a \in \Phi_{a]}$. Ainsi

$$\begin{aligned} H_t\, F_t &= (H_t\, 1) \left[(T_a\, U_a) \int_a^b (1 + H_u\, 1)\, dW_u \right] \\ &= (H_t\, 1) \int_a^b (1 + H_u\, 1)\, (T_a\, U_a)\, dW_u \\ &= (H_t\, 1) \int_a^b (1 + H_u\, 1)\, (T_u\, U_a)\, dW_u. \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau l'hypothèse sur U_a,

$$\begin{aligned} H_t F_t &= (H_t 1) \int_a^b (T_u + H_u) U_a \, dW_u \\ &= (H_t 1) T_b \left(\int_0^b U_a 1_{[a,b]}(u) \, dW_u \right) \text{ [par (3)]} \\ &= (H_t 1) T_t F_t. \end{aligned}$$

Ce qui démontre le lemme.

Notons maintenant que, pour tout $c \in \mathbb{R}$,

$$H_t c = (H_t 1) c = (H_t 1) T_t c. \tag{7}$$

Comme les opérateurs H_t et T_t sont bornés, comme les $H_t 1$ sont des variables aléatoires bornées, comme l'ensemble des combinaisons linéaires d'indicatrices d'intervalles bornés est dense dans $L^2(\mathbb{R}^+)$, en utilisant (7) et le lemme 5, on voit facilement que, pour tout $F_t \in \Phi_{t]}$ élément du premier chaos, *i.e.* $F_t = \int_0^t f(s) \, dW_s$ pour un $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$, on a $H_t F_t = (H_t 1) T_t F_t$.

Les éléments de la forme

$$F_t = \int_0^t \left(\int_0^s f(u) \, dW_u \right) 1_{[s,b]} \, dW_s, \qquad s \leq b \leq t,$$

forment un ensemble total dans le deuxième chaos de $\Phi_{t]}$.

Grâce au lemme 5 et à la remarque précédente sur les éléments du premier chaos, on conclut aussi à $H_t F_t = (H_t 1) T_t F_t$.

Ainsi de suite, par récurrence, on montre que $H_t = (H_t 1) T_t$ sur l'espace des sommes finies de chaos. On conclut par densité de cet espace et par bornitude des opérateurs. ■

III. CARACTÉRISATIONS DES ENDOMORPHISMES PRÉSERVANT LES MARTINGALES

Nous savons donc maintenant caractériser tous les opérateurs bornés T non nuls vérifiant :

(i) $T(FG) = (TF)(TG)$, pour tous $F, G \in \Phi$ tels que $FG \in \Phi$

(ii) $T \mathbb{E}_t = \mathbb{E}_t T, \forall t \in \mathbb{R}^+$

(iii) (T est une isométrie.)

Mais, comme nous l'avons remarqué en section II, ces propriétés n'impliquent pas, *a priori*, que T est l'opérateur associé à un endomorphisme de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui préserve les martingales.

Le théorème qui suit prouve pourtant qu'ici les deux premières conditions sont suffisantes pour conclure que l'opérateur considéré provient d'une transformation de l'espace de Wiener qui préserve la mesure. C'est le calcul stochastique non commutatif qui donne un procédé constructif pour obtenir l'endomorphisme associé. Résultat qui n'apparaît pas évident sans cet outil.

THÉORÈME 6. – *Soit T un opérateur borné, non nul, de Φ, défini partout. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *T est l'isométrie associée à un endomorphisme $\tilde{T}$ de l'espace de Wiener qui préserve les martingales.*

(ii) *L'opérateur T commute avec les espérances conditionnelles $\mathbb{E}_t$, $t \in \mathbb{R}^+$ et vérifie $T(FG) = (TF)(TG)$ pour tous F, G dans Φ tels que FG soit aussi dans Φ.*

(iii) *Il existe un processus adapté $(H_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs bornés sur Φ tel que*

$$T = I + \int_0^\infty H_s \, d\Lambda_s, \quad \textit{sur tout } \Phi,$$

et que pour presque tout t, $H_t = (H_t 1) T_t$ et $H_t 1$ soit à valeurs dans $\{0, -2\}$.

(iv) *Il existe un processus adapté $(H_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs bornés sur Φ tel que*

$$T = I + \int_0^\infty H_s \, d\Lambda_s, \quad \textit{sur tout } \Phi,$$

avec, pour presque tout $s \leq t$,

$$\begin{cases} H_t(FG) = -1/2\,(H_t F)(H_t G), & \forall F, G \in \Phi; \quad FG \in \Phi, \\ H_t W_s = (H_t 1) \displaystyle\int_0^s (1 + H_u 1) \, dW_u. \end{cases}$$

Quand ces conditions sont vérifiées, l'image $\tilde{W}$ du mouvement brownien W par $\tilde{T}$ est donnée par $\tilde{W}_t = \int_0^t k_s \, dW_s$, où le processus prévisible $(k_t)_{t\geq 0}$ vérifie $k_t = 1 + H_t 1$, pour presque tout (t, ω).

Démonstration. – Dans la section II (proposition 1) nous avons vu que (i) $\Rightarrow$ (ii).

Du théorème 5, nous avons (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv).

Pour conclure, il nous suffit de montrer que (iv) $\Rightarrow$ (i).

(iv) $\Rightarrow$ (i)

Pour presque tout t, on a

$$(1 + H_t 1)^2 = 1 + (H_t 1)^2 + 2 H_t 1 = 1 - 2 H_t 1 + 2 H_t 1 = 1.$$

Comme H est un processus adapté d'opérateurs, on a, pour tout t, $1+H_t 1 \in \Phi_{t]}$. Posons $k_t = 1+H_t 1$, $t \in \mathbb{R}^+$. Donc $(k_t)_{t\geq 0}$ est un processus mesurable adapté et borné. Quitte à le remplacer par sa projection prévisible, on peut le supposer prévisible. Comme il vérifie $k^2 = 1$, pour presque tout (t, ω), le processus $\tilde{W}'_t = \int_0^t k_s \, dW_s$ est un mouvement brownien.

Nous définissons, presque partout sur Ω, un endomorphisme $\tilde{T}'$ préservant les martingales :

$$\tilde{T}' : \quad \Omega \to \Omega, \\ \omega \mapsto \tilde{\omega}'$$

tel que, $\tilde{\omega}'(t) = \tilde{W}'_t(\omega)$. Notons T' l'opérateur de Φ associé à l'endomorphisme $\tilde{T}'$.

Comme on le sait, par (i) $\Rightarrow$ (iv), il existe un processus adapté, H', d'opérateurs bornés sur Φ tel que $T' = I + \int_0^\infty H'_s \, d\Lambda_s$, sur tout Φ, avec

$$\begin{cases} H'_t(FG) = -\dfrac{1}{2}(H'_t F)(H'_t G), & \forall F, G \in \Phi; \quad FG \in \Phi, \\ H'_t W_s = (H'_t 1)\displaystyle\int_0^s (1 + H'_u 1)\, dW_u, & \forall s \leq t. \end{cases}$$

Soit $(T'_t)_{t\geq 0}$ la martingale associée à T', nous avons

$$T'_t W_t = T' W_t = \int_0^t (T'_s + H'_s) 1 \, dW_s = \int_0^t (1 + H'_s 1) \, dW_s.$$

D'autre part, $T' W_t = \tilde{W}'_t$, donc, pour presque tout s, $k_s = 1 + H'_s 1$. Mais comme $k_s = 1 + H_s 1$, pour presque tout s, on a $H'_s 1 = H_s 1$, pour presque tout s. Grâce à la formule donnant $H_t W_s$ et $H'_t W_s$, $s \leq t$, on voit qu'alors $H'_t W_s \doteq H_t W_s$, pour presque tout $s \leq t$. En utilisant à la formule de multiplication de H' et de H, on a $H'_t P_t = H_t P_t$, pour tout polynôme P_t de $(W_s)_{s\leq t}$. Par bornitude de H'_t et H_t, $t \in \mathbb{R}^+$, et par densité des polynômes de $(W_s)_{s\leq t}$ dans $\Phi_{t]}$, on a $H'_t = H_t$ sur $\Phi_{t]}$, $t \in \mathbb{R}^+$. Par adaptation des processus H' et H, on a $H'_t = H_t$, pour presque tout t, ce qui permet de conclure. ■.

Nous avons ainsi complètement caractérisé les endomorphismes qui préservent les martingales. Cette caractérisation a l'avantage d'être simple et totalement algébrique. Nous concluons sur une application facile.

COROLLAIRE 7. – *Soit $\tilde{T}$ un endomorphisme de l'espace de Wiener qui préserve les martingales. Soit T l'isométrie qui lui est associée sur Φ. On a donc $T = I + \int_0^\infty H_s \, d\Lambda_s$, sur tout Φ, pour un processus, $(H_t)_{t\geq 0}$, d'opérateurs bornés. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *La transformation $\tilde{T}$ admet une version inversible.*

(ii) *L'opérateur T^* vérifie $T^*(FG) = (T^* F)(T^* G)$ pour tous F, G dans Φ tels que* FG *soit aussi dans Φ.*

(iii) *Le processus $(H_t)_{t\geq 0}$ vérifie*

$$\begin{cases} H_t^*(FG) = -1/2\,(H_t^* F)(H_t^* G), & \forall F, G \in \Phi; \quad FG \in \Phi, \\ H_t^* W_s = H_t^* 1 \displaystyle\int_0^s (1 + H_u^* 1)\, dW_u, & \forall s \leq t. \end{cases}$$

Démonstration. – Si T est l'isométrie associée à un endomorphisme $\tilde{T}$ préservant les martingales, alors T commute avec les $\mathbb{E}_t$, $t \in \mathbb{R}^+$. Comme les $\mathbb{E}_t$ sont auto-adjoints, l'opérateur T^* commute aussi avec eux et

$$T^* = I + \int_0^\infty H_s^* \, d\Lambda_s, \quad \text{sur tout } \Phi.$$

Donc par le théorème 6, on a (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

(i) $\Rightarrow$ (iii).

Si $\tilde{T}$ admet une version inversible, alors T est inversible, avec $T^* = T^{-1}$, et T^{-1} est l'opérateur associé à l'endomorphisme $\tilde{T}^{-1}$. L'opérateur T^* vérifie donc $T^*(FG) = (T^* F)(T^* G)$, pour tous F, G dans Φ tels que FG soit encore dans Φ.

On conclut par le théorème 6.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Si T^* vérifie (iii) et les conditions de l'énoncé (entre autre il commute avec les $\mathbb{E}_t$, $t \in \mathbb{R}^+$), alors, par le théorème 6, T^* est l'opérateur associé à un endomorphisme (préservant les martingales), donc, en particulier, une isométrie. Ainsi T est unitaire, et $\tilde{T}$ inversible (*cf.* [3]). ■

RÉFÉRENCES

[1] S. ATTAL, Characterizations of some operators on Fock space, *Quantum Prob. & Rel. Topics VIII*, World Scientific, 1993, p. 37-46.

[2] S. ATTAL et P. A. MEYER, Interprétation probabiliste et extension des intégrales stochastiques non commutatives, *Séminaire de probabilités XXVII*, Springer Verlag, 1993, p. 312-327.

[3] J. R. CHOKSY, Unitary operators induced by measure preserving transformations, *J. Math. Mech.*, vol. **16**, 1966, p. 83-100.

[4] R. L. HUDSON et K. R. PARTHASARATHY, Quantum Itô's formula and stochastic evolutions, *Comm. Math. Phys.*, vol. **93**, 1984, p. 301-323.

[5] P.-A. MEYER, Éléments de probabilités quantiques, *Séminaire de probabilités XX*, Springer Verlag, 1986, p. 186-312..

[6] P.-A. MEYER, *Quantum probability for probabilists*, Springer-Verlag L.N.M. 1538, 1993.

[7] P.-A. MEYER, Quelques remarques au sujet du calcul stochastique sur l'espace de Fock, *Séminaire de probabilités XX*, Springer Verlag, 1986, p. 321-330.

(Manuscrit reçu le 22 février 1993.)