Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Stéphane Attal

Problèmes d’unicité dans les représentations d’opérateurs sur l’espace de Fock

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 619-632.

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__619_0>

PROBLÈMES D'UNICITÉ
DANS LES REPRÉSENTATIONS D'OPÉRATEURS
SUR L'ESPACE DE FOCK

Stéphane ATTAL

Université Louis Pasteur
Département de mathématiques
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex, France

I Introduction

Dans le cadre du calcul stochastique quantique, défini dans Hudson & Parthasarathy [2], certains opérateurs sur l'espace de Fock admettent des représentations intégrales du type représentation prévisible, (cf Parthasarathy & Sinha [8] et [9]) ou des représentations en noyaux de Maassen, du type représentation chaotique, (cf Maassen [4], Meyer [5] et Dermoune [1]). Lorsqu'un opérateur peut être représenté de l'une ou l'autre manière, se pose la question de l'unicité d'une telle représentation.

Il est connu, cf Lindsay [3], qu'en général une représentation intégrale, $T = \sum_{\rho,\sigma} \int_0^\infty H^\rho_\sigma(s)\, da^\rho_\sigma(s)$ n'est pas unique. Par contre, il est démontré dans le même article que, sur l'espace de Fock de multiplicité finie, si on se restreint aux $H^\rho_\sigma(s)$ fermables, la représentation est unique. Nous nous proposons, dans une première partie, d'éclairer ces résultats par un nouveau contre-exemple qui fait apparaître explicitement l'origine du problème de non-unicité. Nous faisons ensuite un détour par le "bébé Fock", où l'on voit que les conditions d'unicité sont très liées à la notion de prévisibilité. Nous achevons cette partie en démontrant que la condition de fermabilité donne l'unicité, pour un espace de Fock de multiplicité quelconque (au plus dénombrable).

En ce qui concerne les représentations en noyaux de Maassen, il est connu que l'unicité a toujours lieu en multiplicité 1 (Meyer [6]). Dans une seconde partie, nous étendons ce résultat aux espaces de Fock de multiplicité finie quelconque.

II Notations et rappels

Soit $\mathcal{G}$ un espace de Hilbert séparable avec une base orthonormale $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{N}}$ fixée, où $\mathcal{N}$ est un ensemble d'indices au plus dénombrable et ne contenant pas 0. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on note Φ, $\Phi_{t]}$ et $\Phi_{[t}$ les espaces de Fock bosoniques sur $L^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{G})$, $L^2([0,t];\mathcal{G})$ et $L^2(]t,+\infty[;\mathcal{G})$. On interprète Φ comme $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ où $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ est l'espace de Wiener; le mouvement Brownien sur Ω est noté

$(W^\alpha_\cdot)_{\alpha\in\mathcal{N}}$ et sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ (pour tout $t \in I\!R^+$, dW^0_t signifiera dt). On a alors $\Phi_{t]} = L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$.
On désigne par I l'opérateur identité sur Φ. Pour un f dans $L^2(I\!R^+; \mathcal{G})$, on note

$$\begin{cases} f^\beta, \text{ sa } \beta\text{-ième composante dans la base orthonormale } (e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{N}},\ \beta \in \mathcal{N} \\ f^0, \text{ la fonction constante } 1\!\!1 \\ f_{t]} \triangleq f 1\!\!1_{[0,t]} \\ f_{[t} \triangleq f 1\!\!1_{]t,+\infty[} \\ \varepsilon(f), \text{ le vecteur cohérent associé.} \end{cases}$$

Soit $\mathcal{E}$ le sous-espace linéaire engendré par les vecteurs $\varepsilon(f)$ quand f parcourt $L^2(I\!R^+; \mathcal{G})$.

Les familles d'opérateurs de création, d'annihilation et d'échange, définies dans Parthasarathy & Sinha [9], sont notées respectivement $(a^\alpha_0)_{\alpha\in\mathcal{N}}$, $(a^0_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{N}}$, et $(a^\alpha_\beta)_{\alpha,\beta\in\mathcal{N}}$.

Dans la suite nous ferons toujours la convention suivante : les lettres du début de l'alphabet grec α, β, γ parcourent $\mathcal{N}$, celles de la fin de l'alphabet ρ, σ, τ parcourent $\overline{\mathcal{N}} \triangleq \mathcal{N} \cup \{0\}$, mais les couples (ρ, σ) parcourent seulement $\mathcal{M} \triangleq \overline{\mathcal{N}}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Un processus d'opérateurs $(H^\rho_\sigma(s))_{s\geq 0}$, de domaine contenant $\mathcal{E}$, est dit adapté si, pour tout $s \in I\!R^+$, $f \in L^2(I\!R^+; \mathcal{G})$,

$$\begin{cases} H^\rho_\sigma(s)\,\varepsilon(f_{s]}) \in \Phi_{s]} \\ H^\rho_\sigma(s)\,\varepsilon(f) = (H^\rho_\sigma(s)\,\varepsilon(f_{s]}))\varepsilon(f_{[s}). \end{cases}$$

Dans Parthasarathy & Sinha [9] et Meyer [7] il est prouvé que si $(H^\rho_\sigma)_{\rho,\sigma}$ est une famille de processus adaptés, définis sur $\mathcal{E}$, qui vérifie

$$\text{(II.1)} \quad \int_0^t \sum_\alpha (\|H^\alpha_0(s)\varepsilon(f_{s]})\|^2 + \|H^0_\alpha(s)\varepsilon(f_{s]})\|^2 + \|\sum_\beta f^\beta(s) H^\alpha_\beta(s)\varepsilon(f_{s]})\|^2)\,ds < \infty$$

pour tout $t \in I\!R^+$ et $f \in L^2(I\!R^+; \mathcal{G})$, alors l'intégrale stochastique

$$I_t \triangleq \sum_{\rho,\sigma} \int_0^t H^\rho_\sigma(s)\, da^\rho_\sigma(s) \quad , \ t \in I\!R^+,$$

est bien définie comme un processus adapté d'opérateurs sur $\mathcal{E}$ vérifiant pour tout t et tout f,

$$\text{(II.2)} \qquad I_t\varepsilon(f_{t]}) = \sum_\alpha \int_0^t f^\alpha(s) I_s \varepsilon(f_{s]})\, dW^\alpha_s + \sum_{\rho,\sigma} \int_0^t f^\sigma(s) H^\rho_\sigma(s)\varepsilon(f_{s]})\, dW^\rho_s.$$

Dans la suite, chaque fois qu'une de ces intégrales stochastique apparaît on suppose que les processus $(H_\sigma^\rho)_{\rho,\sigma}$ vérifient (II.1).

Dans la partie concernant les noyaux de Maassen, on suppose que la dimension de $\mathcal{G}$ est finie. Il faut noter que nous utilisons, dans cet exposé, la terminologie "noyaux de Maassen" pour désigner, en multiplicité 1, les noyaux à trois arguments, dit "noyaux de Maassen-Meyer" et, en multiplicité finie, leur extension naturelle, décrite dans Dermoune [1].

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des sous-ensembles finis de $\mathbb{R}^+$. Soit $\mathfrak{P}(\mathcal{M})$ l'ensemble des éléments $A = (A_\sigma^\rho)_{\rho,\sigma}$ de $\mathcal{P}^{\mathcal{M}}$ tels que A_σ^ρ et $A_{\sigma'}^{\rho'}$ sont disjoints pour tout $(\rho,\sigma) \neq (\rho',\sigma')$. De la même façon, soit $\mathfrak{P}(\mathcal{N})$ l'ensemble des éléments $U = (U_\alpha)_\alpha$ de $\mathcal{P}^{\mathcal{N}}$ tels que U_α et $U_{\alpha'}$ sont disjoints pour tout $\alpha \neq \alpha'$. On utilise le signe somme pour désigner une union d'éléments disjoints de $\mathcal{P}$. Pour un A dans $\mathfrak{P}(\mathcal{M})$ on note, pour tout α dans $\mathcal{N}$,

$$A^\alpha \triangleq (A_\sigma^\alpha)_\sigma \text{ et } A_\alpha \triangleq (A_\alpha^\rho)_\rho$$

$$\Sigma^\alpha A \triangleq \sum_\sigma A_\sigma^\alpha \text{ et } \Sigma_\alpha A \triangleq \sum_\rho A_\alpha^\rho.$$

On note $\Sigma^\cdot$ (resp. $\Sigma_.$) l'application de $\mathfrak{P}(\mathcal{M})$ dans $\mathfrak{P}(\mathcal{N})$ telle que $\Sigma^\cdot A \triangleq (\Sigma^\alpha A)_\alpha$ (resp. $\Sigma_. A \triangleq (\Sigma_\alpha A)_\alpha$).

Si A et N appartiennent respectivement à $\mathfrak{P}(\mathcal{M})$ et $\mathfrak{P}(\mathcal{N})$, alors $A^\circ N$ désigne l'élément de $\mathfrak{P}(\mathcal{M})$ tel que

$$(A^\circ N)_\sigma^\rho = \begin{cases} A_\sigma^\rho \text{ si } \rho \neq 0 \\ N_\sigma \text{ si } \rho = 0 \end{cases}$$

et $A{:}N$ désigne l'élément de $\mathfrak{P}(\mathcal{M})$ tel que

$$(A{:}N)_\sigma^\rho = \begin{cases} A_\sigma^\rho \text{ si } \rho \neq \sigma \\ N_\rho \text{ si } \rho = \sigma. \end{cases}$$

Enfin, pour U et V dans $\mathfrak{P}(\mathcal{N})$, $U + V$ désigne l'élément de $\mathfrak{P}(\mathcal{N})$ tel que $(U+V)_\alpha = U_\alpha + V_\alpha$ pour tout α dans $\mathcal{N}$.

Rappellons qu'un noyau de Maassen est un opérateur sur Φ de la forme

$$K = \int_{A \in \mathfrak{P}(\mathcal{M})} \widehat{K}(A) \prod_{\rho,\sigma} da_\sigma^\rho(A_\sigma^\rho)$$

où la fonction d'ensemble $\widehat{K}$ vérifie

i) une condition de support compact : $\widehat{K}(A) = 0$ sauf si toutes les composantes A_σ^ρ de A sont contenues dans un intervalle borné $[0,T]$;

ii) une majoration de la forme

$$|\widehat{K}(A)| \leq M^{\sum\limits_{\rho,\sigma} |A_\sigma^\rho|}.$$

Un tel noyau agit sur les vecteurs-test, c'est-à-dire des éléments F de Φ dont la décomposition chaotique

$$F = \int_{U \in \mathfrak{P}(\mathcal{N})} \widehat{F}(U) \prod_{\alpha} dW^{\alpha}_{U_\alpha},$$

vérifie une condition de support compact $\big(\widehat{F}(U) = 0$ sauf si chaque U_α est incluse dans un $[0,T]\big)$ et une condition de majoration $\big(|\widehat{F}(U)| \le M^{\sum_\alpha |U_\alpha|}\big)$.

Dans la suite nous noterons toujours par $\widehat{T}$ le noyau d'un opérateur T (s'il en admet un); de la même façon, nous noterons $\widehat{F}(U)$ les coefficients du développement chaotique d'un vecteur F de Φ.

On sait alors que KF est aussi un vecteur-test dont la décomposition chaotique est donnée par l'expression suivante, où $G(U)$ designe l'ensemble des éléments A de $\mathfrak{P}(\mathcal{M})$ tels que, pour tout α dans $\mathcal{N}$, $\Sigma^\alpha A + A^0_\alpha = U_\alpha$,

$$\text{(II.3)} \qquad \widehat{KF}(U) = \sum_{A \in G(U)} \int_{N \in \mathfrak{P}(\mathcal{N})} \widehat{K}(A^\circ N)\widehat{F}(N + \Sigma.A) \prod_\alpha dN_\alpha$$

(La formule correspondante dans Dermoune [1] p 400 contient une faute de frappe.)

III Problèmes d'unicité des représentations intégrales

III.1 Formulation du problème et contre-exemples

Le problème de l'unicité des représentations intégrales se formule de la façon suivante. Soit $(H^\rho_\sigma)_{\rho,\sigma}$ une famille de processus sur $\mathcal{E}$, adaptés, vérifiant (II.1) pour $t = +\infty$, soit $T \triangleq \sum_{\rho,\sigma} \int_0^\infty H^\rho_\sigma(s)\, da^\rho_\sigma(s)$. A-t-on $T = 0$ si et seulement si les H^ρ_σ sont nuls ?

Ouvrons une parenthèse pour remarquer qu'il y a deux définitions pour "H^ρ_σ est nul" :

(II.2.1) pour presque tout t, $H^\rho_\sigma(t)$ est l'opérateur nul

(II.2.2) pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{G})$, le processus $(H^\rho_\sigma(t)\varepsilon(f))_{t\ge 0}$ est nul.

Il est clair que (II.2.1) entraîne (II.2.2), il y a donc une notion d'unicité forte et d'unicité faible.

Il est facile de construire un contre-exemple si on exige l'unicité forte. Pour cela plaçons nous dans le cas $\mathcal{G} = \mathbb{C}$ et définissons le processus adapté $(H_t)_{t\ge 0}$ par:

$$\begin{cases} \forall t \le 1, \ H_t = 0 \\ \forall t > 1, \ \forall f \in L^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{G}), \ H_t\varepsilon(f) = \begin{cases} \varepsilon(f_{t]}) \text{ si} \|f_{1]}\| = t \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Il est facile de voir que H n'est pas nul au sens fort, que les intégrales stochastiques $\int_0^\infty H_s\,da_1^0(s)$, $\int_0^\infty H_s\,da_0^1(s)$ et $\int_0^\infty H_s\,da_1^1(s)$ sont bien définies et toutes nulles (par (II.2)). Ce genre de contre-exemple ne présente que peu d'intérêt car il exploite seulement la différence entre (II.2.1) et (II.2.2), en effet H est clairement nul au sens faible. Dans la suite nous ne parlerons donc que d'unicité faible.

Nous nous proposons maintenant de donner un contre-exemple à l'unicité faible. Pour plus de simplicité, nous nous plaçons dans le cas $\mathcal{G} = \mathbb{C}$. Nous définissons, sur $\mathcal{E}$, le processus adapté $(H_t)_{t\geq 0}$ par

$$H_t\varepsilon(f) = \begin{cases} \varepsilon(f_{[t}) \text{ si } f(s) = 0 \text{ pour presque tout } s \leq t \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}^+, f \in L^2(\mathbb{R}^+)$. Il est facile de vérifier que H est non nul, adapté et que, par (II.1), pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $I_t \triangleq \int_0^t H_s\,da_1^1(s)$ est bien définie sur $\mathcal{E}$. Par (II.2), on a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$,

$$I_t\varepsilon(f) = \int_0^t f(s)I_s\varepsilon(f_{s]})\,dW_s + \int_0^t f(s)H_s\varepsilon(f_{s]})\,dW_s.$$

Mais, par définition, $f(s)H_s\varepsilon(f_{s]})$ est nul pour presque tout s, donc nous avons

$$\begin{cases} I_t\varepsilon(f) = \int_0^t f(s)I_s\varepsilon(f_{s]})\,dW_s \\ I_0\varepsilon(f) = 0. \end{cases}$$

Donc, pour tout f, le processus $(I_t\varepsilon(f))_{t\geq 0}$ est nul. Il en va donc de même de la variable aléatoire $I_\infty\varepsilon(f)$.

Du fait que toute famille finie de vecteurs cohérents différents est libre, on voit, grâce à ce contre-exemple, que l'on peut parfaitement construire un processus adapté d'opérateurs sur $\mathcal{E}$, vérifiant (II.1), en le définissant indépendamment pour chaque vecteur cohérent. Le résultat est que l'on peut ainsi intégrer des processus d'opérateurs très irréguliers (en l'occurence, dans le contre-exemple, les H_t ne sont pas fermables). Il apparaît donc que, pour avoir unicité des représentations intégrales il faut exiger un minimum de régularité sur les processus que l'on intégre.

III.2 Le cas du "bébé Fock"

Nous nous plaçons ici dans une approximation discrète de l'espace de Fock de multiplicité 1. Pour un N fixé dans $\mathbb{N}^*$, on note $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, \mu_N)$ l'espace canonique associé à une suite $(X_i)_{i\in\{1,\ldots,N\}}$ de variables aléatoires indépendantes, de Bernouilli, symétriques. On note $\mathcal{F}_i \triangleq \sigma(X_j; j \leq i)$, $i \in \{1,\ldots,N\}$, $\mathcal{F}_0 \triangleq \{\emptyset, \Omega_N\}$, $\Phi_{N]} \triangleq L^2(\Omega_N, \mathcal{F}_N, \mu_N)$ (appelé "bébé Fock"), $\Phi_{i]} \triangleq L^2(\Omega_N, \mathcal{F}_i, \mu_N)$, $\mathbb{E}_{i]}$ l'opérateur de projection de Φ sur $\Phi_{i]}$, $i \in \{1,\ldots,N\}$.

Pour tout A, sous-ensemble de $\{1\ldots,N\}$, on note

$$\begin{cases} X_A \triangleq \prod_{i\in A} X_i \ \text{ si } A \neq \emptyset \\ X_\emptyset \triangleq \mathbb{1} \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} A_{k]} \triangleq A\cap\{1,\ldots,k\}, \quad k\in\{1,\ldots,N\} \\ A_{0]} \triangleq \emptyset \\ A_{]k} \triangleq A\cap\{k+1,\ldots,N\}, \quad k\in\{1,\ldots,N\}. \end{cases}$$

Alors $\{X_A; A\in\mathcal{P}(\{1,\ldots,N\})\}$ est une b.o.n. de $\Phi_{N]}$ et, pour tout A et tout k, $X_A = X_{A_{k]}}X_{A_{]k}}$.

Un processus d'opérateurs $(H_k)_{k\in\{1,\ldots,N\}}$ sur $\Phi_{N]}$ est dit adapté si, pour tout A et tout k,

$$\begin{cases} H_k X_{A_{k]}} \in \Phi_{k]} \\ H_k X_A = (H_k X_{A_{k]}})X_{A_{]k}}. \end{cases}$$

Sur $\Phi_{N]}$, les 3 martingales fondamentales de création, d'annihilation et d'échange sont respectivement définies par

$$a_0^1(k)X_A \triangleq \begin{cases} X_{A\cup\{k\}} \text{ si } k\notin A \\ 0 \ \text{ sinon} \end{cases}$$

$$a_1^0(k)X_A \triangleq \begin{cases} X_{A\setminus\{k\}} \text{ si } k\in A \\ 0 \ \text{ sinon} \end{cases}$$

$$a_1^1(k)X_A \triangleq \begin{cases} X_A \text{ si } k\in A \\ 0 \ \text{ sinon,} \end{cases}$$

$k\in\{1,\ldots,N\}$, $A\in\mathcal{P}(\{1,\ldots,N\})$.

Les intégrales stochastiques définies en (II.2) sont ici données par les processus $(\sum_{i=1}^k H_i a_1^0(i))_{k\in\{1,\ldots,N\}}$, $(\sum_{i=1}^k H_i a_0^1(i))_{k\in\{1,\ldots,N\}}$ et $(\sum_{i=1}^k H_i a_1^1(i))_{k\in\{1,\ldots,N\}}$.

Soit maintenant le processus $H \triangleq I - a_1^1$. Comme on a, pour tout k, $a_1^1(k)^2 = a_1^1(k)$, le processus $(\sum_{i=1}^k H_i a_1^1(i))_{k\in\{1,\ldots,N\}}$ est nul. Nous avons donc, ici aussi, un contre-exemple à l'unicité des intégrales stochastiques d'opérateurs. Mais l'avantage du "bébé Fock" est qu'il permet d'avoir une définition naturelle des processus d'opérateurs prévisibles. En l'occurence, un processus d'opérateurs $(H_k)_{k\in\{1,\ldots,N\}}$ est dit prévisible si, pour tout k et tout A,

$$\begin{cases} H_k X_{A_{(k-1)]}} \in \Phi_{(k-1)]} \\ H_k X_A = (H_k X_{A_{(k-1)]}})X_{A_{](k-1)}}. \end{cases}$$

Nous avons le résultat d'unicité suivant.

Proposition III.2.1 – *Soit T un opérateur sur $\Phi_{N]}$ admettant une représentation intégrale*

$$T = \sum_{i=1}^{N} H_1^0(i)a_1^0(i) + \sum_{i=1}^{N} H_0^1(i)a_0^1(i) + \sum_{i=1}^{N} H_1^1(i)a_1^1(i),$$

où les processus H_1^0, H_0^1 et H_1^1 sont prévisibles. Alors T est nul si et seulement si $H_j^i(k)$ est nul, pour chaque $(i,j) \in \{(0,1),\ (1,0),\ (1,1)\}$ et chaque $k \in \{1,\dots,N\}$.

Démonstration

Si l'opérateur T est nul, alors, pour tout $k \in \{1,\dots,N\}$ et tout $A \in \mathcal{P}(\{1,\dots,N\})$, on a $(\mathbb{E}_{k]}TX_{A_{k]}})X_{A_{]k}} = 0$. En développant cette égalité on déduit facilement que, pour tout k,

$$T_{k]} \triangleq \sum_{i=1}^{k} H_1^0(i)a_1^0(i) + \sum_{i=1}^{k} H_0^1(i)a_0^1(i) + \sum_{i=1}^{k} H_1^1(i)a_1^1(i) = 0.$$

Par différentiation, on a,

$$\text{(III.2.2)} \qquad H_1^0(k)a_1^0(k)X_A + H_0^1(k)a_0^1(k)X_A + H_1^1(k)a_1^1(k)X_A = 0.$$

Pour k et A tels que $k \in A$, ceci s'écrit $H_1^0(k)X_{A\setminus k} + H_1^1(k)X_A = 0$, donc $H_1^0(k)X_{A_{(k-1)]}} + (H_1^1(k)X_{A_{(k-1)]}})X_k = 0$. Mais, par l'indépendance de X_k par rapport à $\mathcal{F}_{k-1}$, on a :

$$||H_1^0(k)X_{A_{(k-1)]}} + (H_1^1(k)X_{A_{(k-1)]}})X_k||^2 = ||H_1^0(k)X_{A_{(k-1)]}}||^2 + ||H_1^1(k)X_{A_{(k-1)]}}||^2.$$

Donc $||H_1^0(k)X_{A_{(k-1)]}}||^2 = ||H_1^1(k)X_{A_{(k-1)]}}||^2 = 0$.

Si k et A sont tels que $k \notin A$, alors (III.2.2) s'écrit $H_0^1(k)X_{A\cup\{k\}} = 0$, c'est-à-dire $H_0^1(k)X_{A_{(k-1)]}} = 0$.

Soient maintenant k et A quelconques, soit $A' \triangleq A \cup \{k\}$ et $A'' \triangleq A \setminus \{k\}$. D'après les remarques précédentes on a :

$$H_1^0(k)X_{A'_{(k-1)]}} = H_1^1(k)X_{A'_{(k-1)]}} = H_0^1(k)X_{A''_{(k-1)]}} = 0.$$

Mais, par définition, $A'_{(k-1)]} = A''_{(k-1)]} = A_{(k-1)]}$, donc

$$H_1^0(k)X_{A_{(k-1)]}} = H_1^1(k)X_{A_{(k-1)]}} = H_0^1(k)X_{A_{(k-1)]}} = 0.$$

Ce qui permet de conclure.

∎

III.3 Une condition d'unicité sur l'espace de Fock

Sur l'espace de Fock nous ne disposons pas de définition satisfaisante de processus d'opérateurs prévisibles. Mais, pour ce qui est du problème d'unicité des représentations intégrales, on peut remplacer cette notion par une condition de régularité sur les processus à intégrer.

Théorème III.3.1 – *Soit T un opérateur sur Φ admettant une représentation intégrale,*

$$T = \sum_{\rho,\sigma} \int_0^\infty H_\sigma^\rho(s)\, da_\sigma^\rho(s),$$

où, pour tout (ρ,σ), pour presque tout s, les opérateurs $H_\sigma^\rho(s)$ sont définis sur $\mathcal{E}$, et fermables. Alors T est nul si et seulement si, pour tout (ρ,σ), H_σ^ρ est nul.

Démonstration

Notons $T_t \triangleq \sum_{\rho,\sigma} \int_0^t H_\sigma^\rho(s)\, da_\sigma^\rho(s)$, $t \in \mathbb{R}^+$. Si T est nul il est facile de vérifier par (II.2) que T_t l'est aussi, pour tout t. Mais, pour tout t et tout f on a

$$T_t\varepsilon(f) = \sum_\gamma \int_0^t f^\gamma(s) T_t \varepsilon(f_{s]})\, dW_s^\gamma + \sum_{\rho,\sigma} \int_0^t f^\sigma(s) H_\sigma^\rho(s)\varepsilon(f_{s]})\, dW_s^\rho.$$

Par conséquent, si T est nul, on a

$$\sum_\rho \int_0^t \Big(\sum_\sigma f^\sigma(s) H_\sigma^\rho(s)\varepsilon(f_{s]})\Big) dW_s^\rho = 0.$$

Donc, pour tout ρ_0 fixé dans $\overline{\mathbb{N}}$, pour tout f, il existe un ensemble de mesure nulle, P_f, tel que

$$\forall s \in P_f^c, \sum_\sigma f^\sigma(s) H_\sigma^{\rho_0}(s)\varepsilon(f_{s]}) = 0.$$

Soit σ_0 fixé dans $\overline{\mathbb{N}}$. Soit $\mathcal{H}^{\sigma_0}$ l'ensemble des $f \in L^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{G})$ tels que :

i) seul un nombre fini de composantes de f sont non nulles,

ii) il existe $N(f) \in \mathbb{N}^*$ tel que chaque composante de f est à support dans $[0, N(f)]$,

iii) chaque composante de f est combinaison linéaire finie, à coefficients complexes rationnels, d'indicatrices d'intervalles rationnels,

iv) il existe $s(f) \in \mathbb{Q}_+^*$ et $n(f) \in \mathbb{N}^*$ tels que f^{σ_0} est non nulle sur l'intervalle $[s(f) - 2^{-n(f)}, s(f) + 2^{-n(f)}]$ et toutes les autres composantes sont nulles sur ce même intervalle.

On voit alors facilement que $\mathcal{H}^{\sigma_0}$ est un sous ensemble dénombrable et dense de $L^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{G})$.

Soit $P \triangleq \bigcup_{f\in\mathcal{H}^{\sigma_0}} P_f$, alors P est encore de mesure nulle et

$$\text{(III.3.2)} \qquad \forall t \in P^c,\ \forall f \in \mathcal{H}^{\sigma_0},\ \sum_{\sigma} f^{\sigma}(t) H_{\sigma}^{\rho_0}(t)\varepsilon(f_{t]}) = 0.$$

Pour tout t_0 fixé dans P^c, notons $\mathcal{H}_{t_0}^{\sigma_0}$ l'ensemble des $f \in \mathcal{H}^{\sigma_0}$ tels que $[s(f)-2^{-n(f)}, s(f)+2^{-n(f)}] \ni t_0$. L'ensemble $\mathcal{H}_{t_0}^{\sigma_0}$ est encore dense dans $L^2(I\!R^+;\mathcal{G})$. En effet, il est toujours possible de trouver une suite $(s_n)_{n\in I\!N} \subset \mathbb{Q}$ telle que $[s_n-2^{-n}, s_n+2^{-n}] \ni t_0$ pour tout n. Pour approximer un f fixé dans $L^2(I\!R^+;\mathcal{G})$, il suffit de prendre une suite $(f_{(n)})_{n\in I\!N} \subset \mathcal{H}^{\sigma_0}$ telle que $s(f_{(n)}) = s_n$ et $n(f_{(n)}) = n$, pour tout n (ce qui est toujours possible, vue la définition de $\mathcal{H}^{\sigma_0}$).

Par (III.3.2), on a

$$\forall t_0 \in P^c,\ \forall f \in \mathcal{H}_{t_0}^{\sigma_0},\ \sum_{\sigma} f^{\sigma}(t_0) H_{\sigma}^{\rho_0}(t_0)\varepsilon(f_{t_0]}) = 0.$$

Mais si $f \in \mathcal{H}_{t_0}^{\sigma_0}$ on a $f^{\sigma_0}(t_0) \neq 0$ et $f^{\sigma}(t_0) = 0$, $\forall \sigma \neq \sigma_0$, donc

$$\forall t_0 \in P^c,\ \forall f \in \mathcal{H}_{t_0}^{\sigma_0},\ H_{\sigma_0}^{\rho_0}(t_0)\varepsilon(f_{t_0]}) = 0.$$

Le sous-espace engendré par les $\varepsilon(f)$ quand f parcourt $\mathcal{H}_{t_0}^{\sigma_0}$ est total dans Φ, donc dans le domaine commun des $H_{\sigma}^{\rho}(s)$. De plus, quitte à restreindre P^c, on peut supposer que $H_{\sigma_0}^{\rho_0}(t_0)$ est fermable. Donc, pour tout couple $(\rho_0, \sigma_0) \in \mathcal{M}$, le processus $H_{\sigma_0}^{\rho_0}$ est nul sur son domaine.

■

Il faut maintenant remarquer que le théorème précédent ne donne pas une condition d'unicité des représentations intégrales. En effet, la différence de deux opérateurs fermables n'est pas en général un opérateur fermable; il faut donc une hypothèse supplémentaire. Si on exige de deux opérateurs H et H' fermables que leurs adjoints aient un domaine commun dense, alors $H - H'$ est fermable. D'où la forme suivante du théorème d'unicité.

Théorème III.3.3 – *Soit T un opérateur sur Φ, de domaine contenant $\mathcal{E}$. Il existe au plus un système $(H_{\sigma}^{\rho})_{\rho,\sigma}$ formé de processus d'opérateurs adaptés tel que, pour tout (ρ,σ), pour presque tout s, $H_{\sigma}^{\rho}(s)$ est défini sur $\mathcal{E}$, fermable et admet un adjoint défini sur $\mathcal{E}$, et vérifiant*

$$T = \sum_{\rho,\sigma} \int_0^{\infty} H_{\sigma}^{\rho}(s)\, da_{\sigma}^{\rho}(s).$$

■

IV Unicité des représentations en noyaux de Maassen

On suppose dans cette section que la dimension de $\mathcal{G}$ est finie. Avant tout, nous avons besoin de quelques lemmes techniques.

Pour tout n et m dans $\mathbb{N}$, J_m^n est l'intervalle $[2^{-n}m, 2^{-n}(m+1)[$, donc pour tout n fixé, $(J_m^n)_{m\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, un élément P de $\mathcal{P}$ sera dit séparé à l'ordre n s'il existe au plus un point de P dans chaque J_m^n, $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{H}_n$ le sous-ensemble des éléments A de $\mathfrak{P}(\mathcal{M})$ tels que $\sum\limits_{\rho,\sigma} A_\sigma^\rho$ est séparé à l'ordre n. Il est clair que $\mathcal{H}_n$ converge vers $\mathfrak{P}(\mathcal{M})$ quand n tend vers $+\infty$.

Lemme IV.1 – *Soit n fixé dans $\mathbb{N}$ et A un élément de $\mathcal{H}_n$. Si l'on connaît, pour tout $\alpha \in \mathcal{N}$, la répartition des points de $\Sigma_\alpha A$ et $\Sigma^\alpha A$ parmi les J_m^n, $m \in \mathbb{N}$, alors on connaît la répartition des points de chaque A_σ^ρ.*

Démonstration

On a une matrice de sous-ensembles de $\mathbb{R}^+$, $(A_\sigma^\rho)_{\rho,\sigma}$ (avec $A_0^0 \stackrel{\Delta}{=} \emptyset$), dans laquelle on connaît la répartition de chaque somme de colonne, $\Sigma_\alpha A$, et chaque somme de ligne, $\Sigma^\alpha A$. En utilisant l'égalité $A_\beta^\alpha = \Sigma_\beta A \cap \Sigma^\alpha A$, on peut déduire la répartition de chaque A_β^α; en utilisant l'égalité $A_\beta^0 = \Sigma_\beta A \setminus \sum\limits_\alpha A_\beta^\alpha$, on peut déduire la répartition de chaque A_β^0 et, de la même façon, celle de chaque A_0^α. Ainsi, on a déterminé la répartition de chaque A_σ^ρ.

■

Lemme IV.2 – *L'ensemble des fonctions h, de $\mathfrak{P}(\mathcal{M})$ dans $\mathbb{R}$, de la forme*

$$h(A) = \widehat{F}(\Sigma.A)\widehat{G}(\Sigma^{\cdot} A),$$

pour deux vecteurs-test F et G, est total dans $L^2(\mathfrak{P}(\mathcal{M}))$.

Démonstration

Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des suites $(S(m))_{m\in\mathbb{N}}$ à valeur dans $\{0,1\}$. Deux suites S et S' de $\mathfrak{S}$ sont dites disjointes si elles sont telles que $\{m \in \mathbb{N};\ S(m) = 1\}$ et $\{m \in \mathbb{N};\ S'(m) = 1\}$ sont disjoints; dans ce cas on note $S + S'$ l'élément $(S(m) + S'(m))_{m\in\mathbb{N}}$ de $\mathfrak{S}$. Définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n \stackrel{\Delta}{=} \{P(n,S); S \in \mathfrak{S}\}$, où $P(n,S)$ est l'ensemble des éléments A de $\mathcal{P}$ tels que $|A \cap J_m^n| = S(m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Cela nous donne une partition de $\mathfrak{P}(\mathcal{M})$. Soit $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration engendrée par ces partitions, on peut facilement vérifier que $\mathcal{D}_\infty \stackrel{\Delta}{=} \bigvee\limits_n \mathcal{D}_n$ est égal à la σ-algèbre des Boréliens de $\mathfrak{P}(\mathcal{M})$.

Prenons A dans $\mathfrak{P}(\mathcal{M})$ et $(S_\sigma^\rho)_{\rho,\sigma}$ une suite d'éléments disjoints de $\mathfrak{S}$, on utilisera la notation suivante

$$\mathbb{1}_{P(n,\Sigma.S)}(\Sigma.A) \triangleq \prod_\alpha \mathbb{1}_{P(n,\sum_\rho S_\alpha^\rho)}(\sum_\rho A_\alpha^\rho)$$

(c'est à dire $\mathbb{1}_{P(n,\Sigma.S)}(\Sigma.A)$ indique si $\Sigma_\alpha A$ appartient à $P(n,\Sigma_\alpha S)$ pour tout α, ou non) de la même façon $\mathbb{1}_{P(n,\Sigma^{\cdot} S)}(\Sigma^{\cdot} A)$ est trivialement défini, on note aussi

$$\mathbb{1}_{P(n,S)}(A) \triangleq \prod_{\rho,\sigma} \mathbb{1}_{P(n,S_\sigma^\rho)}(A_\sigma^\rho).$$

Soit φ un élément de $L^2(\mathfrak{P}(\mathcal{M}))$, nous allons montrer que φ peut être approximé par des fonctions du type de celles décrites dans l'énoncé. Comme φ peut être approximé par des fonctions à support compact, on peut supposer que l'axe des temps est de la forme $[0,T]$, pour un $T \in \mathbb{R}^+$. On peut donc supposer que $\mathfrak{P}(\mathcal{M})$ a une mesure de Lebesgue finie.

On sait que $\varphi_n \triangleq \varphi \mathbb{1}_{\mathcal{H}_n}$ tend vers φ quand n tend vers $+\infty$. Soit n_0 fixé dans $\mathbb{N}$, la $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale $(\mathbb{E}[\varphi_{n_0}/\mathcal{D}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\mathfrak{P}(\mathcal{M}))$ vers φ_{n_0}. Donc φ_{n_0} peut être approximé par une suite de fonctions de la forme

$$\text{(IV.3)} \qquad \sum_{i=1}^{k_n} C_i^n \, \mathbb{1}_{P(n,S_i^{n_0})} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{n_0}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

où les k_n appartiennent à $\mathbb{N}$, les C_i^n sont des constantes et chaque $S_i^{n_0}$ est un élément de $\mathfrak{S}^{\mathcal{M}}$.

Pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{H}_{n_0}$ est inclus dans $\mathcal{H}_n$, donc, sur $\mathcal{H}_{n_0}$, on a, par le lemme IV.1,

$$\text{(IV.4)} \qquad \mathbb{1}_{P(n,S)}(A) = \mathbb{1}_{P(n,\Sigma.S)}(\Sigma.A)\mathbb{1}_{P(n,\Sigma^{\cdot} S)}(\Sigma^{\cdot} A)$$

(il faut noter que si A est séparé à l'ordre n et si chaque A_σ^ρ appartient à $P(n,S_\sigma^\rho)$, alors les suites S_σ^ρ sont disjointes.)

D'autre part, rappelons-nous que A appartient à $\mathcal{H}_{n_0}$ si et seulement si il existe au plus un point de $\sum_{\rho,\sigma} A_\sigma^\rho$ dans chaque $J_m^{n_0}$. C'est-à-dire, si et seulement si il y a au plus un point de $\sum_\alpha(\Sigma^\alpha A)$ dans chaque $J_m^{n_0}$. C'est-à-dire, si et seulement si il y a au plus un point de $\sum_\beta(\Sigma_\beta A)$ dans chaque $J_m^{n_0}$. En conséquence, si on définit $\mathcal{K}_{n_0}$ comme étant le sous-ensemble des éléments U de $\mathfrak{P}(\mathcal{N})$ tels que $\bigcup_\alpha U_\alpha$ est séparé à l'ordre n_0, on a

$$\mathbb{1}_{\mathcal{H}_{n_0}}(A) = \mathbb{1}_{\mathcal{K}_{n_0}}(\Sigma.A) = \mathbb{1}_{\mathcal{K}_{n_0}}(\Sigma^{\cdot} A) = \mathbb{1}_{\mathcal{K}_{n_0}}(\Sigma.A)\mathbb{1}_{\mathcal{K}_{n_0}}(\Sigma^{\cdot} A).$$

Finalement, en appliquant ceci et (IV.4) à (IV.3) nous avons prouvé que φ peut être approximé par des combinaisons linéaires finies de fonctions de la forme décrite dans l'énoncé du lemme, mais où $\widehat{F}$ et $\widehat{G}$ sont des fonctions indicatrices. Comme l'ensemble des vecteurs-test F est dense dans Φ, l'ensemble de leurs coefficients $\widehat{F}$ est dense dans $L^2(\mathcal{P}^\nu)$ et on conclut.

■

Proposition IV.5 – *Si Ψ est un élément de $L^2(\mathfrak{P}(\mathcal{M}))$ vérifiant, pour tous vecteurs-test F et G,*

$$\int_{\mathfrak{P}(\mathcal{M})} \Psi(A)\widehat{F}(\Sigma.A)\widehat{G}(\Sigma^{\cdot}A)\prod_{\rho,\sigma} dA^\rho_\sigma = 0$$

alors Ψ est nulle.

Démonstration

Il suffit de remarquer que

$$\int_{\mathfrak{P}(\mathcal{M})} \Psi(A)\widehat{F}(\Sigma.A)\widehat{G}(\Sigma^{\cdot}A)\prod_{\rho,\sigma} dA^\rho_\sigma = \langle\, \Psi\,,\, \widehat{F}\circ\Sigma.\,\widehat{G}\circ\Sigma^{\cdot}\,\rangle_{L^2(\mathfrak{P}(\mathcal{M}))}.$$

On conclut alors facilement avec le lemme IV.2.

■

Nous avons maintenant tous les éléments pour énoncer le résultat général d'unicité des représentations en noyaux de Maassen.

Théorème IV.6 – *Soit K un opérateur sur Φ admettant une représentation en noyaux de Maassen,*

$$K = \int_{A\in\mathfrak{P}(\mathcal{M})} \widehat{K}(A)\prod_{\rho,\sigma} da^\rho_\sigma(A^\rho_\sigma).$$

Alors K est nul si et seulement si la fonction d'ensemble $\widehat{K}$ l'est aussi.

Démonstration

Pour tous vecteurs-test F, G, on a

$$\begin{aligned}\langle G, KF\rangle &= \int_{\mathfrak{P}(\mathcal{N})^2} \sum_{A\in G(U)} \widehat{K}(A^\circ N)\widehat{F}(N+\Sigma.A)\widehat{G}(U)\prod_\alpha dN_\alpha \prod_\alpha dU_\alpha \\ &= \int_{\mathfrak{P}(\mathcal{N})\times\mathfrak{P}(\mathcal{M})} \widehat{K}(A^\circ N)\widehat{F}(N+\Sigma.A)\widehat{G}(\Sigma^{\cdot}A + A^0)\prod_\alpha dN_\alpha \prod_{\rho,\sigma} dA^\rho_\sigma.\end{aligned}$$

Si on pose, pour tout α, $B^\alpha_\alpha \triangleq A^0_\alpha + A^\alpha_\alpha$, on a

$$\langle G, KF\rangle =$$
$$= \int_{\mathfrak{P}(\mathcal{M})} \sum_{\forall \alpha,\, A^0_\alpha + A^\alpha_\alpha = B^\alpha_\alpha} \widehat{K}(A^\circ N)\widehat{F}(N+\Sigma.A)\widehat{G}(\Sigma^{\cdot}A + A^0)\prod_\alpha dN_\alpha \prod_{\substack{\alpha,\sigma\\ \alpha\neq\sigma}} dA^\rho_\sigma \prod_\alpha dB^\alpha_\alpha.$$

Si on change les notations, c'est-à-dire si on remplace chaque N_α par B^0_α, chaque A^α_σ, $\sigma \neq \alpha$, par B^α_σ et chaque A^α_α par C_α, alors $N + \Sigma.A$ s'écrit $\Sigma.B$, $\Sigma^{\cdot}A + A^0$ s'écrit $\Sigma^{\cdot}B$, $A^\circ N$ s'écrit $B^{\cdot}_{\cdot}C$ et l'égalité précédente s'écrit

$$\langle G, KF\rangle = \int_{\mathfrak{P}(\mathcal{M})} \sum_{\forall \alpha,\, C_\alpha \subset B^\alpha_\alpha} \widehat{K}(B^{\cdot}_{\cdot}C)\widehat{F}(\Sigma.B)\widehat{G}(\Sigma^{\cdot}B)\prod_{\rho,\sigma} dB^\rho_\sigma.$$

Pour tout $B \in \mathfrak{P}(\mathcal{M})$, soit $\Psi(B) \triangleq \sum_{\forall \alpha,\, C_\alpha \subset B^\alpha_\alpha} \widehat{K}(B^{\cdot}_{\cdot}C)$, alors

$$\langle G, KF\rangle = \int_{\mathfrak{P}(\mathcal{M})} \Psi(B)\widehat{F}(\Sigma.B)\widehat{G}(\Sigma^{\cdot}B)\prod_{\rho,\sigma} dB^\rho_\sigma.$$

Donc, si K est l'opérateur nul, la proposition IV.5 montre que Ψ est nulle. Mais nous allons vérifier la formule d'inversion de MÖbius, suivante

$$\widehat{K}(B) = \sum_{\forall \alpha,\, C_\alpha \subset B^\alpha_\alpha} \Psi(B^{\cdot}_{\cdot}C)\prod_\alpha (-1)^{|B^\alpha_\alpha \setminus C_\alpha|}.$$

Donc Ψ est nulle si et seulement si $\widehat{K}$ l'est.

■

Références

[1] A. DERMOUNE : Formule de composition pour une classe d'opérateurs. *Séminaire de probabilités XXIV*, p 397-401, 1990.

[2] R.L. HUDSON & K.R. PARTHASARATHY : Quantum Itô's formula and stochastic evolutions. *Comm. Math. Phys.* 93, p 301-323, 1984.

[3] J.M. LINDSAY : Independence for quantum stochastic integrators. *Quantum Prob.& Appl. VI*, proceeding of the Trento conference on Quantum Probability. World Scientific 1991, p 325-332.

[4] H. MAASSEN : Quantum Markov processes on Fock space described by integral kernels. *Quantum Prob. & Appl. II.*, p 361-374, L.N.M. 1136 Springer 1985.

[5] P.A. MEYER : Eléments de probabilités quantiques I-V. *Séminaire de probabilités XX*, p 186-312, 1986.

[6] P.A. MEYER : Eléments de probabilités quantiques VI. *Séminaire de probabilités XXI*, p 34-49, 1987.

[7] P.A. MEYER : Diffusions quantiques III §1. *Séminaire de probabilités XXIV*, p 384-391, 1990.

[8] K.R. PARTHASARATHY & K.B. SINHA : Representation of bounded quantum martingales in Fock space. *Journ. Funct. Anal.* 67 (1986), p 126-151.

[9] K.R. PARTHASARATHY & K.B. SINHA : Representation of a class of quantum martingales II. *Quantum Prob. & Appl. III.*, p 232-250, L.N.M. 1303 Springer 1988.