Université Claude Bernard – Lyon 1

Année 2006/2007

Unité d'enseignement : techniques mathématiques de base

Corrigé du rattrapage du 19 janvier 2007

Exercice 1. a. On cherche une équation de la forme $2x-3y+z=d$, avec d nombre réel à déterminer. On écrit que A appartient au plan ; cela donne $2\times4-3\times2+1\times(-1)=d$, soit $d=1$. L'équation du plan Π est donc $2x-3y+z=1$.

b. Un vecteur normal à Π' est par exemple $\overrightarrow{n'}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Ce vecteur n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{n}$, donc Π et Π' s'intersectent suivant une droite. Un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et à $\overrightarrow{n'}$; on peut prendre $\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{n'}=\begin{pmatrix}-4\\-1\\5\end{pmatrix}$. Il reste à trouver un point particuler de cette droite ; cherchons-le de coordonnée $z=0$. Alors ses coordonnées x et y vérifient : $x+y=0$ et $2x-3y=1$, soit $x=\frac{1}{5}$ et $y=-\frac{1}{5}$. Une représentation paramétrique de la droite intersection est donc : $x=\frac{1}{5}-4\lambda$; $y=-\frac{1}{5}-\lambda$ et $z=5\lambda$ pour λ parcourant l'ensemble des nombres réels.

c. Il s'agit d'intersecter la droite passant par M dirigée par $\overrightarrow{n}$ avec le plan Π. Cette droite a pour représentation paramétrique $x=2\lambda$; $y=-5-3\lambda$ et $z=\lambda$ pour λ parcourant les nombres réels. On cherche le paramètre λ dont le point associé est dans Π, i.e. tel que $2\times2\lambda-3\times(-5-3\lambda)+\lambda=1$, soit $15+14\lambda=1$. Le paramètre cherché est donc -1 et le projeté est le point $(-2,-2,-1)$.

Exercice 2. a. On cherche une fraction rationnelle sous la forme $\frac{a}{t}+\frac{bt+c}{t^2+7}$ pour des coefficients réels a, b et c convenables. On réduit au même dénominateur, la fraction rationnelle obtenue a pour numérateur la polynôme $(a+b)t^2+ct+7a$. En identifiant degré par degré on obtient $a=1$, $b=0$ et $c=2$, soit $F(t)=\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2+7}$.

b. La fonction proposée est définie et continue sur $\mathbf{R}$; sa primitive s'annulant en 0 est la fonction $x\mapsto\int_0^x\frac{e^{2u}+2e^u+7}{e^{2u}+7}\mathrm{d}u$. On fait le changement de variable $t=e^u$. On a $\mathrm{d}t=e^u\mathrm{d}u$, ou encore $\mathrm{d}u=\frac{1}{t}\mathrm{d}t$. On a : $\int_0^x\frac{e^{2u}+2e^u+7}{e^{2u}+7}\mathrm{d}u=\int_1^{e^x}\frac{t^2+2t+7}{t^2+7}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int_1^{e^x}F(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^{e^x}(\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2+7})\,\mathrm{d}t$. Le premier terme vaut $[\ln(t)]_1^{e^x}=x$. Il reste à calculer le second : $\int_1^{e^x}\frac{2}{t^2+7}\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt7}\int_1^{e^x}\frac{\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt7}}{1+(\frac{t}{\sqrt7})^2}=\frac{2}{\sqrt7}\big(\arctan(\frac{e^x}{\sqrt7})-\arctan(\frac{1}{\sqrt7})\big)$. Ainsi une primitive est par exemple la fonction $x\mapsto x+\frac{2}{\sqrt7}\arctan(\frac{e^x}{\sqrt7})$.

Exercice 3. Le discriminant est $\Delta = \frac{1}{4}(49-25+70i)-4\times(2+4i) = 6+\frac{35}{2}i-8-16i = -2+\frac{3}{2}i$. Le tout est donc de calculer les racines carrées (opposées) de $-2+\frac{3}{2}i$, disons sous la forme $a+bi$. Alors a et b vérifient $a^2-b^2=-2$ et $2ab=\frac{3}{2}$. On reporte $b=\frac{3}{4a}$ dans la première équation pour obtenir $a^2 - \dfrac{9}{16a^2} = -2$, et donc $a^4+2a^2-\frac{9}{16}=0$. Le discriminant de cette équation en a^2 est $4+\frac{9}{4} = \frac{25}{4} = (\frac{5}{2})^2$; les racines en sont $\frac{1}{2}(-2-\frac{5}{2})$ et $\frac{1}{2}(-2+\frac{5}{2}) = \frac{1}{4}$. Seule la seconde est positive, on en déduit donc que $a^2=\frac{1}{4}$. Une racine carrée du discriminant est donc $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$. Les racines cherchées sont $\frac{1}{2}\big((\frac{7}{2}+\frac{5}{2}i)\pm(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i)\big)$, soit $2+2i$ et $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$.

Exercice 4. L'équation caractéristique associée est $X^2+X-2=0$, de discriminant 9 et de racines 1 et -2. Les solutions de l'équation homogène $y''(x)+y'(x)-2y(x)=0$ sont les fonctions $x\mapsto \lambda e^x+\mu e^{-2x}$ pour λ et μ parcourant les nombres réels. Il reste à trouver une solution particulière, que l'on cherche sous la forme $y_0 : x \mapsto \lambda_0\cdot\cos(2x)+\mu_0\cdot\sin(2x)$. On a : $y_0'(x) = -2\lambda_0\cdot\sin(2x)+2\mu_0\cdot\cos(2x)$ et $y_0''(x) = -4\lambda_0\cdot\cos(2x)-4\mu_0\cdot\sin(2x)$. Cela donne : $y_0''(x)+y_0'(x)-2y_0(x) = (-4\lambda_0+2\mu_0-2\lambda_0)\cdot\cos(2x)+(-4\mu_0-2\lambda_0-2\mu_0)\cdot\sin(2x)$. Par identification, on obtient le système : $-6\lambda_0+2\mu_0=0$ et $-2\lambda_0-6\mu_0=1$, de solution $\lambda_0=-\frac{1}{20}$ et $\mu_0=-\frac{3}{20}$. Finalement, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme $x\mapsto -\frac{1}{20}\cdot\cos(2x)-\frac{3}{20}\cdot\sin(2x)+\lambda e^x+\mu e^{-2x}$ pour λ et μ parcourant $\mathbf{R}$.