Université Claude Bernard – Lyon 1

Année 2006/2007

Unité d'enseignement : TMB

Corrigé du contrôle continu du 13 novembre 2006

Exercice 1. Afin de le simplifier, on divise le polynôme $2iX^2+(6-10i)X-14+8i$ par son coefficient dominant. Comme $(2i)^{-1} = -\frac{1}{2}i$, cela revient à multiplier ce polynôme par $-\frac{1}{2}i$ pour obtenir un polynôme avec les mêmes racines. On travaille donc sur l'équation $X^2-(5+3i)X+(4+7i) = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = (5+3i)^2 - 4\times(4+7i) = 25-9+30i-16-28i = 2i$. De l'écriture trigonométrique $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, on déduit que les racines carrées de Δ sont $\pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i) = \pm(1+i)$. Finalement, les solutions de l'équation proposée sont $\frac{1}{2}\times\big((5+3i)+(1+i)\big)$ et $\frac{1}{2}\times\big((5+3i)-(1+i)\big)$, c'est-à-dire $3+2i$ et $2+i$.

Exercice 2. 1) La seule condition imposée à x pour que la formule définissant f ait un sens provient du logarithme ; le domaine de définition est donc $]0;+\infty[$. Pour les limites aux bornes, la seule forme indéterminée est en $+\infty$; une comparaison du cours implique : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Comme 2 est pair, on a $\lim\limits_{x\to 0, x>0} \ln(x)^2 = +\infty$ et comme on considère des nombres réels $x>0$ on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x) = +\infty$. Le calcul de la dérivée de f fournit : $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}\ln(x)^2 + \dfrac{1}{x}\times 2\times\dfrac{1}{x}\times\ln(x)$. On factorise : $f'(x) = \frac{1}{x^2}\times\ln(x)\times\big(2-\ln(x)\big)$. Cette dérivée est négative sur $]0;1[$, positive sur $]1;e^2[$ et négative sur $]e^2;+\infty[$ et donc f est décroissante sur $]0;1[$, croissante sur $]1;e^2[$ et décroissante sur $]e^2;+\infty[$.

2) Le domaine de définition dans ce cas est le même (pour la même raison qu'en 1), soit $]0;+\infty[$. En ce qui concerne la limite en $+\infty$, c'est aussi 0 (pour la même raison qu'en 1) mais quand $x>0$ tend vers 0, la fonction $\ln(x)^3$ tend vers $-\infty$; cela implique $\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x) = -\infty$. On a : $f'(x) = \frac{1}{x^2}\times\ln(x)^2\times\big(3-\ln(x)\big)$ et donc f est croissante sur $]0;e^3[$ et décroissante sur $]e^3;+\infty[$.

Exercice 3. 1) La fonction $F_0(x)$ est la primitive de la fonction constante égale à 1 qui s'annule en 0 ; autrement dit, c'est la fonction $x\mapsto x$. Pour $F_1(x)$, on fait le changement de variable $u = e^t$. On a $u'(t) = e^t$, soit $\mathrm{d}u = e^t\mathrm{d}t$. Bref : $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}(t)} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})} = \int_0^x \frac{2e^t\mathrm{d}t}{(1+e^{2t})} = 2\times\int_1^{e^x}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)} = 2\times\big(\arctan(e^x)-\arctan(1)\big)$. Finalement, on a $F_1(x) = 2\times\arctan(e^x)-\frac{\pi}{2}$.

2) C'est du cours, mais on peut le refaire : $\mathrm{th}'(x) = \dfrac{\mathrm{sh}'(x)\mathrm{ch}(x)-\mathrm{ch}'(x)\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2} = \dfrac{\mathrm{ch}(x)^2-\mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)^2}$, soit $\mathrm{th}' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$.

3) On écrit : $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}(t)^n} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}(t)^{n-2}\times\mathrm{ch}(t)^2}$, ce qui avec la question précédente suggère de faire une intégration par parties où la fonction dérivée est th'. On obtient

$F_n(x) = [\mathrm{th}(t) \times \frac{1}{\mathrm{ch}(t)^{m-2}}]_0^x - \int_0^x \mathrm{th}(t) \times (-n-2)\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)^{n-1}}\mathrm{d}t$, soit $\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^{n-1}} + (n-2)\int_0^x \frac{\mathrm{sh}(t)^2}{\mathrm{ch}(t)^n}\mathrm{d}t$. Cela donne $F_n(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^{n-1}} + (n-2)\int_0^x \frac{\mathrm{ch}(t)^2-1}{\mathrm{ch}(t)^n}\mathrm{d}t$. Finalement, on obtient : $F_n(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^{n-1}} + (n-2)F_{n-2}(x) - (n-2)F_n(x)$, ce qui permet de conclure.

Exercice 4. On peut multiplier l'équation par $\cos(\theta)$ et utiliser $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$, pour obtenir $1 - \frac{4}{\sqrt{3}}\sin(\theta)\cos(\theta) = 0$. Comme $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$, l'équation devient donc $\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(2\theta) = 1$, soit $\sin(2\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que 2θ vaut $\frac{\pi}{3}$ ou $\pi - \frac{\pi}{3}$ modulo 2π. Bref les solutions sont les nombres réels de la forme $\frac{\pi}{3} + k\pi$ et $\frac{\pi}{6} + k\pi$ pour k variant dans l'ensemble $\mathbf{Z}$ des nombres entiers relatifs.

Une autre solution consiste à diviser l'équation par $\cos(\theta)$ de façon à obtenir une équation polynomiale de degré 2 en $\tan(\theta)$. Cette équation est $X^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}X + 1 = 0$, son discrminant vaut $\frac{4}{3}$ et ses racines sont $\sqrt{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Les solutions sont les nombres réels θ dont la tangente vaut $\sqrt{3}$ ou $\frac{1}{\sqrt{3}}$.