Mardi

Corrigé

Exercice 1

$$z^2 + 8iz - 16 + 2i = 0$$

$$\Delta = (8i)^2 - 4(-16+2i)$$

$$= -64 + 64 - 8i = -8i \qquad \Leftarrow \quad 0{,}5$$

$$(x+iy)^2 = -8i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -8 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \qquad \leftarrow \quad 1$$

$$\iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \leftarrow \quad 1$$

On prend $\sqrt{\Delta} = 2 - 2i$ $\leftarrow$ 0,5

$$z = \frac{-8i \pm (2-2i)}{2} = \frac{2 - 10i}{2} = 1 - 5i$$

ou $\leftarrow$ 1

$$\frac{-2-6i}{2} = -1 - 3i$$

4

Exercice 2

1) arccos est la réciproque de cos

sur $[0, \pi]$ ← 0,5

donc $\arccos(\cos(3x)) = 3x$

pour $3x \in [0, \pi]$, i.e. $x \in [0, \pi/3]$ ← 1

2). $\arccos(\cos(3x + 2\pi)) = \arccos(\cos(3x))$ ← 0,5

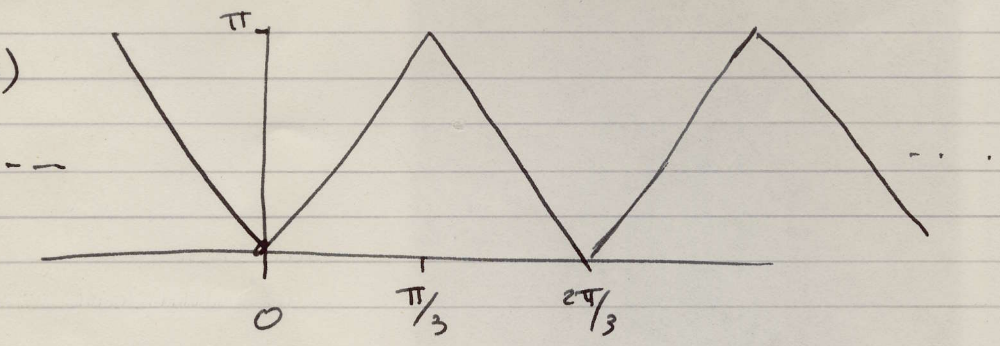
$\quad\quad \|$

$\arccos\left(\cos 3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$ ← 0,5

Elle est $\frac{2\pi}{3}$ - périodique.

• $\arccos(\cos 3(-x)) = \arccos(\cos 3x)$ ← 0,5

3)



← 1

4

$\boxed{\text{Exercice 3}}$

$f(x) = sh\, x^3$

$f'(x) = 3x^2 ch(x^3)$

Méthode 1

Extrema = pts critiques ou pts du bord ← 0,5

Points critiques : $f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 = 0$ car $ch \neq 0$ ← 1

$\Leftrightarrow x = 0$

$f(0) = sh\,0 = 0$ ← 0,5

$f(-1) = sh(-1) = \dfrac{e^{-1} - e^{1}}{2}$

$f(2) = sh(8) = \dfrac{e^{8} - e^{-8}}{2}$

$f(-1) < f(0) < f(2)$ ← 1

car $f(-1) < 0$ ← 0,5

et $f(2) > 1$ ← 0,5

Méthode 2 dérivée ← 0,5

$f'(x) \geq 0$ car ch est toujours > 0 ← 1,5

donc f est ~~[illegible]~~ croissante ← 0,5

donc $\left.\begin{array}{l} \min = f(-1) = sh(-1) \\ \max = f(2) = sh(2) \end{array}\right\}$ ← 1,5

~~[illegible]~~

Total 4

П3

Exercice 4

1) $\ln(1+h) = h + h\varepsilon(h)$

avec $\varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$ ⟹ 1

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + 1/x\right) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln(1+h)$ ← 0,5

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(h + h\varepsilon(h)\right)$ ← 0,5

$= 1$ ← 0,5

3) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln(1 + 1/x)}$ ← 0,5

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$ ← 0,5

car exp est continue ← 0,5

4

$\boxed{\text{Exercice 5}}$

$$\int_{-\ln 2}^{\frac{1}{2}\ln 3 - \ln 2} \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}\, e^{x}\, dx.$$

$y = e^{x}$ est une bijection dérivable $\leftarrow$ 0,5

$dy = e^{x} dx$ (ou $dx = \frac{1}{y} dy$) $\leftarrow$ 1

$$= \int_{e^{\ln 1/2}}^{e^{\ln \sqrt{3}/2}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy \quad \leftarrow 1$$

$$= \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \left[\arcsin y\right]_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \quad \leftarrow 1$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \quad \leftarrow 0{,}5$$

4

Grand total 21

5