ENSEIGNEMENT

Enseigner les mathématiques à l'université

Patrick Sargos[1]

La pédagogie est une pratique, pas une science. Chaque discipline a sa propre pédagogie. Ici, nous parlerons seulement des mathématiques. Ce qui est nécessaire au futur enseignant, c'est un ensemble de conseils simples à appliquer, qui l'aideront dès le départ, mais aussi qui l'inviteront à se poser des questions par la suite. Ce qui suit est essentiellement une série de remarques toutes plus évidentes les unes que les autres. Toutefois, quelques suggestions personnelles qui ne font pas l'unanimité apparaissent ça et là ; il appartient à chacun d'y faire son tri, ou d'adapter selon ses idées.

Sans doute y a-t-il beaucoup d'oublis et de maladresses dans cette première version. Pour améliorer ce texte, les commentaires des collègues seront les bienvenus !

1 Généralités

Les enseignants-chercheurs recrutés à l'université sont en général bien préparés à la recherche ; mais, pour ce qui est de l'enseignement, ils sont entièrement livrés à eux-mêmes (les formations actuelles en pédagogie semblent beaucoup plus orientées vers des théories dont il semble difficile d'extraire des règles pratiques). Il faut pourtant insister sur l'importance de la qualité de l'enseignement :

Remarque 1. Un enseignant-catastrophe = des générations sacrifiées.

Traditionnellement, chacun de nous tire son modèle d'enseignement presque exclusivement de son expérience d'étudiant. On s'améliore alors naturellement :

Remarque 2. Expérience professionnelle consciencieuse + réflexion personnelle + discussions avec les collègues = progrès assurés.

Dans une carrière d'enseignant-chercheur, le système universitaire ne nous incite pas à faire des efforts pour l'enseignement (il n'y aucune sanction ni aucune récompense liée à la qualité de l'enseignement, ni aucune vérification de cette dernière, les autorités faisant confiance — le plus souvent à juste titre — à la conscience professionnelle de chacun). Enseigner est évidemment une fonction essentielle de l'universitaire ; mais, à dose modérée, c'est un facteur d'équilibre qui compense l'isolement de la recherche, un passionnant contact avec la réalité humaine, qui justifie en partie le niveau scientifique qu'on exige de nous ; enfin, c'est aussi un moyen de consolider sa culture mathématique générale.

Les programmes de mathématiques de l'enseignement supérieur sont bien au point depuis longtemps. Les problèmes pédagogiques se limitent surtout aux

[1] Université Henri Poincaré, Nancy I

détails : choix techniques dans le cours écrit, présentation du tableau, méthode d'interrogation en TD, etc.

Nous allons faire un tour d'horizon de ces détails, en essayant de les classer par thèmes.

Simplicité, clarté, efficacité

Remarque 3. On ne peut enseigner efficacement que ce que l'on a bien compris.

On entend souvent dire les étudiants de leur professeur : « *Il est très fort, mais on ne comprend rien* ». Dans la plupart des cas, on devrait plutôt dire : « *Il n'arrive pas à expliquer parce qu'il n'a pas suffisamment préparé son cours, ou, pire encore, parce qu'il a du mal à comprendre ce qu'il enseigne* ».

Remarque 4. Pas de mots savants.

Il existe deux cas d'utilisation des mots savants : 1) lorsque, au cœur d'un problème profond, un concept difficile revient souvent (il est alors nécessaire de lui donner un nom savant) ; 2) lorsqu'on veut faire croire qu'on est dans le cas précédent.

Les mathématiques sont par essence très compliquées ; il n'y a donc pas lieu de faire semblant d'être savant quand on les enseigne.

Remarque 5. Toujours le plus simple possible.

Dans tous les domaines de l'existence, le plus difficile est de trouver les idées simples qui marchent. Malheureusement, nous avons tous une forte tendance à collectionner les idées compliquées qui ne marchent pas. Face à n'importe quel problème, dans l'enseignement comme dans la recherche, faites un effort pour trouver plus simple.

Remarque 6. La clarté est une qualité qui se travaille.

On reviendra plus loin sur la façon dont un cours doit être préparé, car c'est essentiellement de là que provient la clarté d'un enseignement. Mais, être plus clair doit être un souci constant ; à vous de trouver les moyens pour y parvenir.

La tenue du tableau

Remarque 7. Un cours de mathématiques se fait au tableau.

La pédagogie des mathématiques a une particularité : la tenue du tableau y joue un rôle essentiel. On peut dire que presque tous les problèmes pédagogiques peuvent être résolus par ce biais. Les diverses méthodes de projection sur écran sont de plus en plus utilisées ; nous ne parlerons que du tableau classique, avec de la craie (celle qui s'étale sur nos vêtements), laissant au lecteur le soin d'adapter notre propos à la projection sur écran.

Pour s'assurer que les étudiants ont les moyens de suivre parfaitement, il ne faut pas oublier que

Remarque 8. Tout ce qui est mathématique doit être entièrement écrit au tableau, avec des phrases complètes.

L'objectif à atteindre est le suivant : tout ce qui est nécessaire à la compréhension de la partie mathématique qu'on traite doit figurer sur le tableau.

L'étudiant ne suit pas toujours le rythme du professeur, il s'attarde sur certains détails ; il doit pouvoir retrouver le fil en lisant le tableau. Dans ce cas, il perdra au plus quelques explications orales.

Si vous souhaitez donner des indications supplémentaires qui ne sont pas indispensables à la compréhension du sujet traité (répondre à une question, par exemple), vous pouvez bien sûr le faire par oral ; si l'explication requise est un peu compliquée, alors il faut écrire sur un autre coin du tableau. En résumé :

Remarque 9. On peut faire par oral au plus quelques remarques simples ; tout le reste doit avoir un support écrit.

Quand un étudiant passe au tableau, le plus souvent, on a du mal à lire ce qu'il a écrit, et l'ensemble donne l'impression d'être désordonné (bien que certains étudiants écrivent remarquablement). Cela doit vous inciter à :

Remarque 10. Écrire lisiblement, avec des gros caractères et en appuyant fort sur la craie. Encadrer les énoncés et bien les séparer de la solution (ou de la démonstration). Il est impératif de séparer le tableau en bandes verticales.

Comme dit plus haut, l'effet d'un tableau mal tenu est désastreux. Un long entraînement est hélas nécessaire pour arriver à un niveau « professionnel », sauf exception. Cependant, les conseils ci-dessus permettent d'arriver rapidement à un niveau intermédiaire acceptable.

Un autre élément essentiel de l'utilisation du tableau : les dessins.

Remarque 11. Des dessins ! Toujours plus de dessins !

C'est ce qui manque le plus aux enseignants débutants : savoir faire le bon dessin qui explique presque tout (noter que la remarque vaut aussi pour les chercheurs débutants). Il faut dire que trouver le bon dessin est souvent le reflet de la meilleure compréhension, et que cela nécessite une très grande maturité sur le sujet, contrairement aux idées préconçues. Il faut toutefois prendre certaines précautions :

Remarque 12. Ne pas faire un dessin au tableau si on ne l'a pas préparé correctement.

Au passage, profitons-en pour placer une remarque analogue :

Remarque 13. Ne pas se lancer dans une explication qu'on ne maîtrise pas.

Sinon, on arrive à un résultat surprenant ; les étudiants pensent que c'est leur faute s'ils ne comprennent pas et ils se disent : « *Il est très fort, mais on ne comprend rien* ». (voir plus haut).

La présentation de l'enseignant

Les étudiants n'ont pas toujours pitié de nous ; ils ont une furieuse tendance à bavarder et parfois pire. Que peut-on y faire ?

Remarque 14. Pas de tenue fantaisiste, pas de comportement fantaisiste.

À moins, bien sûr, d'être capable d'en assumer les conséquences.

Remarque 15. L'enseignant doit parler avec assurance.

Facile à dire, mais c'est précisément le plus difficile. Comment y parvenir ? L'expérience est essentielle et la situation s'améliore toute seule avec le temps. Mais cela ne suffit pas toujours. Il est vivement recommandé aux jeunes enseignants qui n'ont pas encore trop d'habitudes de se mobiliser pour progresser :

Remarque 16. 1) Ne pas rester inerte face à un public agité : se forcer à parler mieux ou plus fort. 2) S'appuyer sur le cours écrit : un tableau bien présenté et les étudiants peuvent suivre ; si bavardages bruyants, accélérer le cours jusqu'à ce que le calme revienne.

Certains d'entre nous ont des problèmes particuliers qui peuvent transformer leurs heures de cours en calvaire, et qui finissent par hanter leur existence. Les troubles les plus fréquents sont les défauts d'élocution, le manque d'assurance ou des difficultés à communiquer. Si les problèmes ne sont pas bénins, on peut toujours consulter un médecin ou un orthophoniste ; il n'y a aucune honte à cela, contrairement à ce que trop de gens pensent encore. Attention toutefois au piège des médecines magiques.

On en vient alors au problème majeur : le chahut.

Remarque 17. Ne pas accepter le statut de « professeur chahuté ».

Autrefois, il était impensable d'avouer son statut de professeur chahuté, le sujet était tabou. Les mentalités ont considérablement évolué sur ce genre de sujet. Aujourd'hui, on peut communiquer avec ses collègues, se soulager sans risquer d'être exclu de la communauté, et même recevoir des conseils ou un soutien.

Mon conseil en pareil cas est formel : il faut réagir immédiatement et avec détermination. Examinons plus en détails.

Remarque 18. Le chahut ne peut persister que si, à la fois
1) l'enseignant a un défaut de présentation (problème d'élocution, manque d'assurance, difficultés à communiquer, etc.)
2) Le cours est mal fait.

Les deux problèmes doivent être combattus simultanément.

Pour prendre de l'assurance, pour parler mieux en public, préparez vos cours en pensant à la façon dont vous allez les présenter. Entraînez-vous avec des effectifs réduits (parlez-en au chef du département). Trouvez vous-mêmes vos propres « trucs ». Tout plutôt que l'immobilisme.

En résumé :
Remarque 19.
1) Bien préparer son cours et le présenter de façon impeccable au tableau.
2) Résoudre ses problèmes de présentation dans la mesure du possible, en allant au besoin jusqu'à la consultation médicale.
3) Améliorer son assurance par l'expérience et par un travail personnel.

Par contre, attention à ne pas commettre les erreurs de comportement qui vont aggraver les problèmes. Par exemple, les attitudes familières ou, au contraire sévères, distantes, sont des sources de problèmes ; si vous n'avez pas une faculté de réaction suffisante, il vaut mieux rester plus neutre. Bien entendu, si vous avez une personnalité très originale, mais cohérente, si vos réactions sont à la hauteur des problèmes, tout vous est permis.

Autre erreur classique : la réaction trop molle par rapport à ce que la situation mériterait. « *Ah, mais ça suffit à la fin* » (intonation chantante) est une réaction qui discrédite l'enseignant, au même titre qu'une colère qui ne fait pas peur.

Remarque 20. Une réaction inadaptée peut être pire que pas de réaction du tout.

Il vaut mieux attendre d'avoir pris de l'assurance avant de se lancer dans des réactions dont on ne contrôle pas l'évolution.

Le conseil suivant est une précaution élémentaire :

Remarque 21. Ne pas accepter la charge d'un cours en amphi avant d'avoir l'assurance requise.

Le niveau du cours et des étudiants

J'invite les enseignants débutants à se méfier de tout ce que l'on dit du niveau des étudiants. De nombreux collègues estiment que les étudiants sont aujourd'hui inimaginablement faibles par rapport à autrefois. Il y a une raison à cela : c'est qu'on ne se voit pas progresser. Quand on nous parle de notions mathématiques qui nous sont familières, par exemple une série numérique semi-convergente, nous avons immédiatement une sorte d'image qui nous vient à l'esprit et qui nous permet de visualiser l'objet et toutes ses propriétés immédiates (et, si nous sommes un tant soit peu spécialistes, c'est tout un volume de propriétés qui nous vient à l'esprit, exagérations mises à part).

L'étudiant, au contraire, ne s'est encore fabriqué aucune image relative au concept qu'il vient d'apprendre ; ses hésitations ne sont pas synonyme de nullité, mais d'une période intermédiaire que tout le monde a connue, puis oubliée.

« *De mon temps...* » est une expression dont il faut se méfier. La Société Mathématique de France a distribué à une époque un papier qui répondait magnifiquement à cette complainte des enseignants : par des citations qui reculent dans le temps, ce papier montre que les gens ont toujours eu l'impression que le niveau de pensée régressait, ce qui ramènerait probablement le sommet de la pensée humaine à l'*homo habilis*.

Cependant, on peut penser que des décisions politiques (donner le baccalauréat à 80% de la population, à une certaine époque ; une telle décision peut être critiquée ou appréciée, mais notre propos n'est pas là), ont pu faire effectivement baisser le niveau de l'enseignement supérieur pendant quelques années.

De toute façon, quel que soit le résultat de nos analyses, nous n'avons pas le choix ; il faut

Remarque 22. Adapter le niveau du cours à celui des étudiants.

Cette phrase en elle-même n'est pas très précise et nous y reviendrons dans cette section. Toutefois, il faut signaler que personne n'a jamais vu un cours de mathématiques trop simple ! La tendance naturelle est de faire trop difficile ; si on se place dans les normes actuelles, on peut imaginer que

Remarque 23. Un cours trop difficile gêne au moins 95% de l'auditoire. Un cours trop simple en gênera au plus 5%.

Là encore, ces statistiques ne cherchent pas à être précises, mais avec un peu d'indulgence, l'image n'est pas très loin de la réalité.

Faire un cours difficile est très tentant, mais

Remarque 24. On ne fait pas cours pour se faire plaisir, mais pour être compris.

L'université française pose un problème très particulier. Presque tous les bons étudiants du premier cycle en mathématiques se trouvent dans les classes préparatoires aux grandes écoles. Cependant, de très bons candidats, pour des raisons variées, ont choisi l'université. À part ces exceptions, le niveau moyen des autres semble un peu faible devant la subtilité des programmes (de mon temps, c'était pareil !).

Remarque 25. Le niveau des étudiants dans les premières années de l'université est complètement hétérogène ; le niveau du cours doit en tenir compte.

Sur ce point, les opinions divergent. Certains collègues pensent qu'on ne peut pas diminuer le contenu du cours sans encourager la baisse du niveau des étudiants. La remarque suivante est évidente : un cours de niveau zéro et un cours de niveau infini auront le même résultat égal à zéro ; il ne reste plus qu'à déterminer les paramètres qui vont optimiser le résultat. Partant des programmes officiels, c'est à nous de trouver le niveau de difficulté adapté à notre public, par l'expérience, par notre perception de la réaction des étudiants, par les discussions avec les collègues, mais aussi par la réflexion personnelle.

Voici maintenant un exemple de choix possible. Pour cela, imaginons la situation suivante :

– 30% des étudiants ont un niveau inexplicable (un niveau tellement bas qu'on se demande comment ils peuvent se trouver à l'université),

– 30%, les faibles, arrivent au mieux à répéter les raisonnements les plus simples,

– 30%, les moyens, peuvent raisonnablement espérer la moyenne avec beaucoup de travail,

– 10% sont bons, certains d'un niveau exceptionnel.

Je recommande le choix suivant :

Remarque 26. Cibler systématiquement le cours sur les « moyens ». Compléter par de nombreuses explications très simples en visant les « faibles » (étant bien entendu qu'elles seront appréciées par tous). Glisser occasionnellement quelques subtilités pour les « bons ».

Ce dernier point sert en particulier à montrer que l'université ne dispense pas un « sous-enseignement ».

Le comportement vis-à-vis des étudiants

Cette section ne comporte que des évidences totales, et pourtant...

La règle d'or est la suivante :

Remarque 27. En toutes circonstances, l'enseignant doit rester « professionnel ».

Voici quelques remarques qui s'appliquent souvent et qui précisent la remarque ci-dessus.

Remarque 28. Ne jamais insulter ni vexer un étudiant.

Remarque 29. Ne pas décourager ; prendre l'habitude d'encourager l'étudiant qui progresse.

Remarque 30. Garder un calme absolu devant les erreurs mathématiques. Savoir les commenter sans le moindre agacement.

Mieux encore : on peut parfois remercier l'étudiant d'avoir fait une erreur instructive, faute de quoi une difficulté du cours serait passée inaperçue.

Remarque 31. Humour ou fantaisie nécessitent des contreparties pour éviter les dérapages, et en particulier une cohérence entre le cours et la personnalité de l'enseignant.

Bien sûr, s'il se présente une occasion exceptionnelle pour une plaisanterie bien à propos, à vous de jouer.

Enfin, est-il vraiment nécessaire de rappeler qu'il faut

Remarque 32. Arriver à l'heure, et surtout ne pas dépasser l'horaire.

Faciliter la compréhension

Remarque 33. Comprendre une notion, c'est savoir la comparer avec des situations analogues plus simples et bien comprises.

Voici quelques exemples.

– La formule de Taylor sera mieux comprise si on a déjà assimilé le théorème des accroissements finis.

– La formule sur le produit de deux séries entières ne peut pas être énoncée sans rappeler l'analogie avec les polynômes (la raison pour laquelle un produit de deux polynômes est un polynôme est bien comprise par les étudiants).

– Dans l'étude des fonctions de plusieurs variables, il faut toujours regarder le problème analogue à une variable (ou deux) avant de regarder le cas géneral. On risque de reconnaître un énoncé classique.

La remarque suivante devient alors évidente.

Remarque 34. Préparer un répertoire de telles remarques qui recouvre l'ensemble du cours.

Ce travail de préparation est d'autant plus facile que le niveau mathématique de l'enseignant est plus élevé.

Un raisonnement nouveau qui ne ressemble à rien de connu est difficile à assimiler ; il faut acquérir une vue d'ensemble alors que chaque détail est déjà une énigme. Il devient clair que

Remarque 35. La seule façon de comprendre un raisonnement est de le répéter autant que nécessaire.

Ce principe est contraire aux lieux communs sur la question. Pourtant, il peut aussi être recommandé aux jeunes chercheurs.

Faire des comparaisons, rabâcher les mêmes idées, donner des explications, tout cela prend du temps alors qu'il y a un programme à respecter. Est-ce judicieux ? Bien sûr, il appartient à chacun de s'organiser ; mais attention :

Remarque 36. Quelques raisonnements bien compris valent mieux qu'une grande quantité de charabia.

2 Les Travaux Dirigés

Le plus souvent à l'université, les enseignements sont divisés d'une part en cours magistraux en amphi, et, d'autre part, en TD (travaux dirigés) dans des salles de classe ordinaires. Les TD consistent à faire des séances d'exercices dans lesquelles les étudiants participent en passant au tableau mais aussi en posant ou en répondant à des questions.

La méthode habituelle qui consiste à faire chercher les exercices par les étudiants en classe n'a jamais été remise en cause. Il me semble pourtant que cela coûte un temps précieux qui pourrait être mis à profit pour faire des commentaires, et engager des dialogues, notamment autour des points délicats de l'exercice. Cela demande de la part de l'enseignant une plus grande maîtrise, à la fois de la partie mathématique et de la communication avec les étudiants. Ce paragraphe est écrit dans l'optique où c'est cette dernière méthode qui est utilisée ; mais pour ceux qui préfèrent procéder de la manière habituelle, l'essentiel de ce qui suit s'adapte sans mal.

Corriger un exercice

Le corrigé d'un exercice commence toujours de la même façon :

Remarque 1. Rappeler systématiquement au tableau l'énoncé de l'exercice en cours.

Voici un autre principe de base :

Remarque 2. La solution de l'exercice doit être entièrement rédigée au tableau par l'enseignant, sauf exception.

Les exceptions peuvent être, par exemple :
– l'étudiant au tableau a rédigé suffisamment bien ;
– l'exercice est trop simple ou trop classique ou trop proche d'un autre déjà bien rédigé ;
– une solution raccourcie est suffisante.

Remarque 3. Avancer lentement dans les explications et les solutions. Ne pas hésiter à répéter les points cruciaux et à récapituler l'ensemble de la solution. Ne pas oublier de faire des figures chaque fois que c'est possible.

En bref, rappelez-vous que l'étudiant met du temps à recopier le tableau, surtout s'il a du mal à comprendre.

Remarque 4. Ne pas se contenter de donner la solution. Il faut aussi faire des commentaires.

C'est notre rôle, et c'est évidemment la partie la plus difficile du métier d'enseignant, qu'on a tendance à escamoter. Faire des commentaires pertinents nécessite un niveau mathématique assez élevé, une bonne expérience et un stock de remarques personnelles sur le programme. On peut encore relever l'impact des commentaires avec des artifices, par exemple en faisant un peu de « spectacle » (l'art de raconter des histoires en public est réservé aux enseignants qui sont déjà à l'aise).

Voici quelques questions standard qui permettent d'introduire des commentaires et faire plus qu'un simple corrigé :
– Le résultat reste-t-il vrai si on supprime cette hypothèse ?
– Ce passage de la démonstration est-il nécessaire ?

– La solution qui vient d'être exposée est-elle correcte ?

Cette dernière question peut être posée à l'issue d'un corrigé par un étudiant qui vient de faire une erreur instructive (Il convient d'être très courtois envers l'étudiant, en lui précisant après coup qu'il ne s'agit pas d'une attaque contre lui, mais qu'il est de l'intérêt général d'insister sur cette erreur instructive). On peut pousser l'idée un peu plus loin en insérant dans le corrigé écrit au tableau une erreur volontaire, mais qui est très instructive, puis demander où est l'erreur. Il s'ensuit des discussions particulièrement profitables dans lesquelles les étudiants en viennent à douter de tout ; il est recommandé de ne pas se lancer dans de telles manœuvres si on n'est pas assez sûr de soi.

Les idées de commentaires sont inépuisables pour qui maîtrise son sujet et il vous appartient de les trouver et de les adapter à votre style.

D'autres exemples de commentaires sont à chercher dans l'histoire des mathématiques ou dans les applications, tout particulièrement aux autres sciences.

Remarque 5. S'il existe une deuxième solution suffisamment différente de la première, ne pas hésiter à la rédiger en détails.

Il est très profitable aux étudiants de découvrir deux solutions bien différentes d'un même exercice, à la fois sur le plan philosophique et pour une meilleure compréhension mathématique. Il se peut aussi que certains étudiants aient cherché à faire l'exercice, en partant dans la direction de cette deuxième solution, d'où un intérêt supplémentaire.

Remarque 6. Quand on utilise un résultat du cours (qu'il s'agisse du cours actuel ou d'un cours des années précédentes), il est impératif de rappeler l'énoncé complet, sauf exception.

En effet, tout d'abord cette méthode est irremplaçable pour retenir un résultat ; c'est lorsqu'on l'apprend pour la deuxième fois (ou plus) qu'un énoncé se comprend bien, ce qui montre la nécessité de rappeler un théorème, même s'il ne fait pas partie du cours actuel.

Le deuxième avantage, c'est de montrer que réécrire un énoncé au moment où on doit l'utiliser n'est jamais une perte de temps : c'est la seule façon de l'appliquer sans erreur.

Par ailleurs, beaucoup d'étudiants font un blocage quand, au cours d'un exercice, on utilise un théorème qu'ils n'ont pas compris ; un rappel écrit du résultat, accompagné de quelques explications, et le problème psychologique s'estompe.

Remarque 7. Il est parfois utile de réécrire au tableau une définition.

Car souvent les étudiants ont oublié. Les remarques précédentes peuvent être répétées ici, mais avec plus de modération.

Remarque 8. S'assurer que les étudiants ont compris.

Pour cela, inutile de poser la traditionnelle question : « *Y a-t-il quelqu'un qui n'a pas compris* », car personne ne répond jamais. Il faut tourner sa phrase avec plus d'habileté : « *La solution vous paraît-elle assez claire, ou préférez-vous que je* *la réécrive avec plus de détails ?* » La réponse des étudiants n'est pas toujours celle qu'on attend.

Remarque 9. Laisser aux étudiants le temps de recopier ce qui est écrit au tableau ; laisser des temps morts entre deux exercices, ou chaque fois que vous sentez qu'ils ont besoin de se ressaisir.

Pendant ces temps morts, il est bon de les laisser discuter entre eux. Souvent, les étudiants utilisent les temps morts pour demander à leur voisin une explication.

Faire chercher les exercices

Je préconise fortement de ne pas perdre de temps à laisser les étudiants chercher les exercices en classe, mais au contraire de les faire chercher à la maison. Le temps gagné peut alors être utilisé pour faire des commentaires, donner des explications, faire les rappels de cours qui interviennent dans la solution. De toute façon, les conseils qui suivent s'appliquent quel que soit le mode d'enseignement choisi.

La première chose est de motiver les étudiants à chercher les exercices ; il doivent en comprendre l'importance.

Remarque 10. Chercher les exercices est le seul moyen de progresser.

La comparaison suivante est, à mon sens, à peine exagérée :

Remarque 11. Assister au corrigé sans avoir cherché, c'est comme assister à un match de tennis : ça paraît facile, mais ça ne suffit pas pour progresser.

Très souvent, les étudiants ne cherchent pas les exercices, mais étudient les corrigés. C'est une autre façon de travailler, certainement moins performante, mais il ne faut pas oublier que chaque étudiant a sa personnalité et que seul le résultat compte. Notre devoir est de tout faire pour qu'ils en viennent à chercher les exercices. On pourrait donner des devoirs à rendre chaque semaine, la solution idéale en quelque sorte ; mais cela impliquerait que nous consacrions un temps excessif à corriger des copies, au détriment de beaucoup d'autres tâches. Que faut-il faire ?

Remarque 12. D'une séance à l'autre, les étudiants doivent avoir une liste d'exercices à chercher pour la prochaine fois.

Par exemple, s'il y a une feuille d'exercices, indiquez les numéros de ceux qu'ils auront à regarder. S'il n'y a pas de feuille d'exercices, écrivez les énoncés au tableau.

Cependant, vous ne pouvez pas vous contenter de cela, sinon les étudiants ne feront aucun effort pour les chercher. Il faut les motiver :

Remarque 13. Présenter et commenter les exercices à chercher pour la prochaine fois (notamment avec des dessins) pour leur donner envie de chercher. Ne pas en donner trop à la fois.

Tous les moyens sont bons pour motiver les étudiants. Quand on commente un exercice à chercher pour la prochaine fois, on peut vraiment leur communiquer le désir de trouver la solution. C'est tout un art !

Remarque 14. Les étudiants ne cherchent que les exercices qui leur paraissent faciles. Il se découragent très vite devant les difficultés.

Par exemple, un exercice où il n'y a que du calcul est généralement jugé facile. Dès que l'exercice ne se réduit pas à une application directe d'un critère, seuls les deux ou trois meilleurs continuent à chercher.

Nous verrons plus loin comment doser le niveau des exercices.

Faire passer un étudiant au tableau

Les étudiants n'osent pas passer au tableau. Certainement s'agit-il de réflexes qui remontent à l'enseignement secondaire (timidité, peur, gêne, mauvais esprit, ou tout simplement paresse). Pourtant

Remarque 15. Passer au tableau, c'est :
– une leçon particulière,
– un entraînement pour les oraux,
– un entraînement pour les futurs enseignants.

Un étudiant qui croit avoir fait juste ne découvrira peut-être jamais son erreur s'il ne passe pas au tableau.

La première règle pour motiver, c'est ne pas démotiver :

Remarque 16. Aucune réflexion désobligeante envers l'étudiant au tableau, et cela quelles que soient ses erreurs mathématiques. Pas d'intonation agacée.

Certains enseignants se sentent obligés de montrer un agacement devant les erreurs, alors que chez d'autres cela vient tout seul ; c'est, à mon sens, un manque de professionnalisme dans les deux cas.

Remarque 17. Pas de bavardages quand un étudiant planche au tableau.

D'une part par correction vis-à-vis de lui, mais aussi parce que cela fait partie du déroulement du cours.

Remarque 18. Ne jamais rater une occasion d'encourager un étudiant qui passe au tableau.

Par exemple s'il est arrivé au bout d'un raisonnement, ou s'il a su expliquer un passage délicat, etc.

Remarque 19. Si l'étudiant se trompe, vous devez lui trouver des excuses pour qu'il ne se sente pas diminué vis-à-vis des autres.

Par exemple : « *Ne vous inquiétez pas si vous n'avez pas réussi à aller jusqu'au bout, c'est une difficulté classique* ».

Il se pose aussi l'important problème de savoir qui doit aller au tableau.

Remarque 20. Il vous appartient de trouver une stratégie personnelle, adaptée à votre style, pour désigner les étudiants qui doivent passer au tableau.

Voici quelques choix possibles :

– demander un volontaire (il y en a parfois),

– interroger à tour de rôle (vous devez auparavant trouver une parade contre l'enfer des étudiants nuls qui passent au tableau),

– demander qui a trouvé, puis en choisir un dans cet ensemble s'il est non vide. Sinon, choisir quelqu'un parmi ceux qui ont cherché. Si cet ensemble est à nouveau vide, vous pouvez faire le corrigé vous-même, mais en faisant des efforts pour provoquer le dialogue,

– passer dans les rangs en regardant les solutions qui vous sont proposées. Vous trouverez sûrement quelqu'un qui a quelque chose d'intéressant à exposer (ne serait-ce qu'une solution partielle, ou une erreur instructive),

– prévenir à l'avance celui qui sera interrogé sur tel exercice, en lui demandant de le préparer à la maison. Il faut alors choisir les étudiants à tour de rôle.

Le niveau des exercices

Quel niveau d'exercices faut-il choisir ? Aucune réponse ne fera l'unanimité au sein du corps enseignant. Certains pensent qu'abaisser le niveau des exercices aura pour inéluctable conséquence la baisse du niveau des étudiants. D'autres ne posent que des exercices infaisables, sans doute pour épater les collègues. En fait, il faut donner des exercices de niveaux variés. Soyons plus précis.

Remarque 21. Pour assimiler un concept nouveau, il faut commencer par une série d'applications immédiates des définitions. Même remarque pour les énoncés d'un type nouveau.

Avant d'attaquer des exercices composés portant soit sur un nouveau concept, soit sur un résultat difficile à appliquer (il y a une foule d'exemples possibles : résolution de systèmes linéaires, produit de matrices, dérivation sous le signe $\int$), il est indispensable de traiter des exemples numériques immédiats, autant que nécessaire.

Remarque 22. Graduer les exercices.

Plus précisément, pour accéder à un exercice de niveau moyen ou difficile, il faut au préalable traiter des exercices semblables, mais plus simples.

Remarque 23. Réserver les « exercices composés » pour la fin du chapitre.

Un exercice composé est celui dont la solution réunit plusieurs étapes de nature bien différente. L'étudiant ne peut y accéder que s'il est suffisamment à l'aise sur la partie du cours concernée.

Remarque 24. On progresse le plus avec des exercices adaptés à son niveau.

Malheureusement, le niveau des étudiants n'est pas homogène, comme il a déjà été dit. Comment choisir ?

Remarque 25. C'est à vous de déterminer le niveau des exercices en fonction de la réaction des étudiants ; vous décidez alors d'ajouter ou non des indications.

Si vous ne connaissez pas encore le niveau, si vous n'arrivez pas encore à interpréter les réactions des étudiants, sachez que

Remarque 26. Un exercice que vous pensez trop simple peut profiter à tous, tandis qu'un exercice trop difficile peut décourager les meilleures volontés.

Ce qui ne veut pas dire qu'il ne faut faire que des exercices enfantins.

Remarque 27. Il est nécessaire de glisser occasionnellement un exercice un peu subtil, mais seulement si :
– la solution n'est pas trop longue,
– le terrain a déjà été préparé par des exercices antérieurs,
– la solution ne fait appel qu'à des notions bien acceptées par les étudiants.

Le style des exercices est également un sujet de discussion. On ne parlera pas des « applications directes », qui ont été vues plus haut. Il faut distinguer les exercices purement calculatoires, ou purement algorithmiques, ou abstraits, ou intermédiaires. Dans cette dernière catégorie, il faut compter les exercices qui traitent d'un exemple concret, mais en faisant appel à la fois à des calculs ou des algorithmes, et à des mécanismes d'une certaine généralité.

Remarque 28. Doser entre les exercices « algorithmiques », les exercices « théoriques », et les exercices « intermédiaires », ces derniers devant être majoritaires.

La rédaction

La rédaction reste un grand mystère pour les étudiants. Quand on leur dit que leur solution est mal rédigée, ils pensent qu'ils ont fait des fautes de français. Il faut d'abord se mettre d'accord sur le sens du mot « rédiger ».

Remarque 29. Rédiger une solution, c'est transformer une vision complète de la solution en une démonstration rigoureuse.

Un mathématicien professionnel n'est jamais sûr de trouver l'idée de la démonstration ; mais si on la lui donne, il est sûr de savoir la rédiger. Pour un étudiant, c'est bien différent. Même s'il voit quelle est l'idée, la transformer en une démonstration est souvent difficile.

Une mauvaise qualité de la rédaction n'est jamais due au manque de maîtrise de la langue (le correcteur comprend presque toujours une solution « mathématiquement claire » entachée d'une succession d'erreurs de langage), mais à une erreur mathématique : affirmation non justifiée (parce que la difficulté est restée inaperçue), non sens (une phrase qui n'a pas de sens ; c'est souvent une faute grave), explication incompréhensible (qui traduit une confusion), imprécision (par exemple, oublier de dire « il existe », ou « quel que soit », introduire de nouvelles lettres sans expliquer de quoi il s'agit, écrire une expression comme si elle dépendait de la variable muette qui apparaît dedans, etc. L'imprécision est la faute de rédaction la plus courante ; elle traduit un manque de maîtrise du sujet). Une solution peut être à peu près juste, mais avec une plus ou moins bonne rédaction. Les étudiants ont du mal à comprendre cela.

Remarque 30. Enseigner comment rédiger fait partie de notre travail.

Il faut donc en parler chaque fois qu'une solution est écrite au tableau : souligner les erreurs de rédaction, les commenter et proposer une correction modèle.

3 Le cours magistral

Dans ce paragraphe, nous ne parlerons que de la partie écrite du cours. La façon de le présenter a été décrite aux généralités du §1.

Avant toute chose, il faut rappeler qu'un cours doit être structuré.

Remarque 1. Découper le cours en chapitres et les chapitres en paragraphes, chacun ayant un titre.

Les titres des chapitres ou des paragraphes sont indispensables pour que l'étudiant se repère et pour donner du relief à l'ensemble du cours. Il est à peine moins important de numéroter ces chapitres ou paragraphes.

Un autre principe qui est à la base de tout cours :

Remarque 2. Un cours n'est pas une œuvre de référence, mais un exposé simplifié qui ne contient pas beaucoup plus que le strict minimum nécessaire à couvrir le programme.

Il est évident que la marge de manœuvre de l'enseignant est énorme, et que son niveau mathématique et sa responsabilité sont fortement sollicités.

Définitions et théorèmes

Remarque 3. La dénomination de « théorème » doit être réservée aux grands résultats et porter si possible un nom (exemple : le théorème de la base incomplète).

Il est essentiel de ne pas galvauder le terme « théorème » qui doit garder son aura. Un théorème qui porte un nom sera plus facile à retenir et contribuera à créer des points de repère.

Remarque 4. Se limiter aux théorèmes essentiels.

Les conséquences importantes du théorème seront appelées « corollaire » ; ceux-ci peuvent être d'une aussi grande importance que le théorème et doivent eux aussi avoir un nom, dans la mesure du possible.

Remarque 5. Les résultats dérivés d'un théorème, et qui ne sont pas absolument indispensables, ne doivent pas faire l'objet de nouveaux énoncés.

Ils peuvent apparaître sous forme de remarque ou d'exercice ; il n'y a pas besoin de les connaître par cœur. Le rôle de l'étudiant est plutôt de savoir les retrouver à partir du théorème dont ils découlent. D'une façon plus générale, il faut

Remarque 6. Tout faire pour réduire le nombre des énoncés.

Sinon le cours devient terne, plus rien ne s'en dégage.

Remarque 7. Ne pas sacrifier la clarté d'un énoncé pour gagner en généralité.

À moins d'avoir en vue des applications précises, et ce dans le cadre d'un enseignement de haut niveau (maîtrise), la généralité présente rarement un véritable intérêt, et ne doit pas dépasser ce qui est demandé dans le programme officiel. Je dirai même qu'une trop grande généralité est nuisible dans beaucoup de cas, car elle masque souvent le sens du résultat, et donne aux étudiants une fausse idée de la réalité mathématique.

Remarque 8. Lors d'une première approche, il vaut mieux choisir la formulation la plus simple.

Pour les définitions et les notations, le problème est similaire, bien qu'il soit beaucoup plus difficile de réduire leur nombre. Faut-il ou non faire l'économie d'une définition ? Cela fait partie des responsabilités de l'enseignant qui doit garder ce problème présent à l'esprit.

Remarque 9. Limiter le nombre de définitions et de concepts nouveaux, mais sans diminuer la portée du cours.

Attention bien sûr à ne pas supprimer certaines définitions ou certains concepts qui ajoutent à la compréhension.

Remarque 10. Les énoncés du cours sont classés en « théorème », « corollaire », « proposition », « propriété », « lemme », « exercice », « remarque », ou « exemple ».

Les propriétés apparaissent après les définitions, et s'appliquent à des résultats qui ne sont pas inattendus. Par exemple : « la limite du produit est le produit des limites », « la composée de fonctions continues est continue », sont typiquement des propriétés.

Les lemmes servent surtout à séparer les difficultés à l'intérieur d'une démonstration ; leur énoncé n'est pas forcément à retenir, sauf si l'enseignant le demande.

La décomposition d'un polynôme en facteurs premiers (disons sur les complexes) est un grand théorème. Sa démonstration nécessite plusieurs étapes. Les énoncés intermédiaires qui sont conséquence du théorème lui-même doivent être appelés « lemme » ; c'est ainsi que le théorème de d'Alembert-Gauss, ou théorème fondamental de l'algèbre, peut, par exemple, être présenté avec le titre : « Lemme 1 (Théorème fondamental de l'algèbre) ». Bien sûr, en première année, ce théorème doit être admis.

Les résultats dont l'énoncé est élaboré, et qui ne méritent pas la dénomination de « théorème », peuvent être appelés « proposition ».

Enfin, on peut toujours signaler des énoncés sous la forme de « remarque », « exemple », ou « exercice », selon les cas.

Exemples et commentaires

Remarque 11. Tout nouvel énoncé ou toute nouvelle définition doit être accompagné de commentaires et d'exemples, sauf exception.

Trouver des exemples instructifs n'est pas difficile, même si cela demande déjà un réel travail. Par contre, commenter un résultat ou une définition nécessite davantage de compétences. Examinons quelques pistes.

Remarque 12. Chaque fois que cela est possible, il faut replacer le théorème ou la définition dans son contexte historique.

Voilà une complication pour la préparation du cours ! En effet, l'histoire des mathématiques est très peu enseignée et beaucoup d'entre nous ne la connaissent pas assez pour être capables d'y faire référence. Je pense que tout responsable de cours devrait faire l'effort de se plonger dans l'historique des points critiques de son cours ; malheureusement, cela prend du temps. Il y a de bonnes références sur le sujet, et il n'est pas désagréable de s'en servir comme livre de chevet.

Remarque 13. Expliquer le sens des énoncés ou des définitions.

Le « dessin qui explique tout » reste évidemment le must de la pédagogie mathématique. En voici un exemple. Comment démontrer visuellement la formule, dite de Fubini,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx \right) dy\,?$$

Le sens de cette formule se comprend aisément quand on dit que l'intégrale double est le volume d'un tas de sable (ici, D est la partie du sol qui supporte le tas de sable et le graphe de f en délimite la partie supérieure) ; on le découpe alors en tranches verticales très fines parallèles à l'axe des x, dont le volume vaut à peu près $\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$ multiplié par dy, autrement dit, le volume de la tranche est à peu près égal à sa surface multipliée par son épaisseur. Il ne reste plus qu'à ajouter tous ces petits volumes, et le tour est joué.

Mais les dessins ne sont pas toujours possibles et il vous appartient de rechercher le commentaire ad hoc dans chaque cas particulier.

Les démonstrations

La démonstration reste le meilleur commentaire qu'on puisse faire sur un énoncé. Le problème est d'arriver à la faire comprendre.

Remarque 14. Pendant la démonstration, il faut avancer lentement en donnant des explications. Il faut rappeler les énoncés des résultats qu'on utilise et faire des figures chaque fois que c'est possible. Si la démonstration est un peu longue, ou si elle suit un scénario subtil, il est bon de récapituler l'ensemble en mettant en avant les idées directrices.

L'étudiant a ainsi la sensation d'avoir suivi et cela l'incite à venir au cours plutôt que d'étudier tout seul sur un livre.

Des simplifications dans le cours, comme la suppression d'énoncés (cf. Remarque 5 du §3) ou de parties du cours qui paraissent trop pointues pour une première approche, permettent de récupérer le temps investi dans les explications.

Voici maintenant un autre problème de pédagogie. Dans quels cas peut-on se passer d'une démonstration ; autrement dit, peut-on admettre un résultat ?

Remarque 15. Il vaut mieux « surexpliquer » certaines démonstrations qu'on estime instructives et, en compensation, en omettre d'autres qui le paraissent moins.

Omettre une démonstration est toujours une responsabilité : cela peut être interprété comme le refus de faire un point précis de son travail. Il ne faut pas que les étudiants le voient ainsi. Mais beaucoup de petites propriétés ont des démonstrations suffisamment standard pour être laissées en exercice.

Remarque 16. Bien choisir les démonstrations qu'on décide d'omettre. Compenser par un surcroît de commentaires et d'exemples, en donnant la sensation d'une grande rigueur.

Un cas où la démonstration peut être faite sur un exemple plutôt que dans le cas général est le théorème sur la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples. En effet, le cas général pose des problèmes de notation ; de plus, un exemple bien choisi contiendra déjà toute la difficulté et permettra un exposé incomparablement plus clair.

Omettre une seule démonstration importante peut également permettre de simplifier grandement le cours. Mais il faut être prudent ; certains collègues peuvent considérer cela comme une faute et il est bon de savoir leur répondre avec des arguments qui prouvent que le choix a été fait en connaissance de cause.

4 Le sujet d'examen

L'élaboration d'un sujet d'examen nécessite quelques précautions.

Remarque 1. Un sujet facile et long est la forme d'examen la plus sélective.

Un sujet difficile ne séparera pas forcément les moyens des mauvais.

Remarque 2. Un sujet trop facile reste très sélectif, à condition d'être suffisamment long.

Cela ne paraitra pas évident à tout le monde. Pourtant, on remarque qu'un étudiant qui n'est pas fort, devant un exercice très simple, se met à hésiter sans qu'on sache pourquoi, alors qu'un bon étudiant hésitera en moyenne beaucoup moins. L'épreuve facile et longue évite les « accidents » (les risques d'accident avec un énoncé difficile sont élevés, alors que sur un exercice facile, ils sont réduits) et mesure mieux la valeur des candidats, car il y a beaucoup de questions (analogie possible : un match en trois sets est plus sélectif qu'un match en un set).

Une épreuve trop difficile n'est pas classante ; en poussant les paramètres à l'extrême, une épreuve où tout le monde a eu zéro ne fournit aucune indication, alors qu'il n'y a pas d'analogue avec les épreuves trop faciles.

Bien entendu, les termes « facile » ou « difficile » sont à interpréter en fonction du niveau des étudiants. Pour un concours d'entrée aux ENS, les principes restent les mêmes, mais il faut faire une translation sur le niveau.

Remarque 3. Un sujet doit être composé de plusieurs exercices indépendants.

Il y a une multitude de raisons à cela :
1) Cela permet de mieux recouvrir le programme.
2) On peut ainsi poser à peu près exactement les questions qu'on veut.
3) Les étudiants peuvent passer à l'exercice suivant sans culpabiliser.
4) Ils peuvent commencer par celui qui les inspire le mieux.
5)Il y a un côté rassurant.
6) Les risques d'accident sont moindres.
7) Dans un problème long, comme cela se pratiquait autrefois, une bonne partie des questions portaient nécessairement sur des points éloignés du cours.
8) La correction des copies avec exercices indépendants est plus simple (par exemple, on peut corriger exercice par exercice, ce qui est préconisé par certains collègues).

Remarque 4. Graduer les exercices.

En fait, l'idéal est de commencer par un ou deux exercices immédiats qui permettent de détecter ceux qui ne savent vraiment rien et qui donnent déjà 5 ou 6 points à tous les étudiants moyens (attention aux surprises !). Ensuite, il faut mettre des exercices moins simples, mais accessibles à tous, la sélection se faisant sur le fait que les moins bons inventent des difficultés là où il n'y en a aucune. Enfin, un dernier exercice doit fournir une occasion pour un raisonnement légèrement plus élaboré ; la dernière question, facultative, pourra être astucieuse.

Remarque 5. Pas d'originalité un jour d'examen : le sujet doit être le plus près possible du cours et des TD.

Les étudiants jugent inacceptable qu'on leur pose un sujet d'examen qui n'est pas assez en rapport avec le cours. Ils ont l'impression qu'ils ont travaillé pour rien, d'où un sentiment d'injustice.

En pensant cela, ils ont à la fois tort et raison, car d'avoir travaillé sur une partie des mathématiques fait progresser dans les autres parties, à condition qu'elles soient assez voisines. De toute façon, le plus simple, et qui ne coûte rien, est de poser presque la même chose que ce qu'ils ont vu en cours ou en TD. Cela les motive très fort pour travailler, sachant qu'ils sont au courant des sujets des années précédentes.

Remarque 6. Le sujet d'examen doit être accompagné d'un barème précis.

C'est tellement rassurant pour les étudiants ! Cela fait partie de leurs revendications les plus courantes, de même qu'un sujet proche du cours. Il n'y a aucune raison de leur refuser cela, bien au contraire. Certains collègues précisent que le barème qu'ils proposent est seulement indicatif. C'est une possibilité qui permet de se couvrir en cas d'imprévu.

Remarque 7. Rédigez entièrement le corrigé du sujet (ou faites-le rédiger par un collègue) pour vous assurer qu'il correspond bien à ce que vous pensez.

On risque de découvrir que certaines questions étaient beaucoup plus difficiles que prévu, voire infaisables ! J'ai moi-même trop souvent fait cette erreur pour ne pas insister tout particulièrement sur ce point essentiel.