Université Claude Bernard Lyon 1
Préparation aux épreuves écrites du CAPES

Semestre printemps 2020 - 2021

Fiche Algèbre linéaire 3

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Notions abordées

- *Vecteurs propres, valeurs propres, espaces propres.*
- *Polynôme minimal, polynôme caractéristique.*
- *Espaces caractéristiques, trigonalisation.*
- *Homothéties, projections et symétries vectorielles.*
- *Sommes directes.*
- *Diagonalisation.*
- *Puissances de matrices.*
- *Supplémentaires.*

PARTIE I : Éléments propres

On fixe un corps commutatif K et on considère un endomorphisme u d'un K-espace vectoriel E.

1 - Rappeler les définitions des éléments propres de u :

> **Un vecteur propre de** u est un vecteur

> **Une valeur propre de** u est un scalaire

> **L'espace propre de** u associé à la valeur propre λ est

2 - Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par tout endomorphisme de E qui commute avec u.

3 - (Lemme des noyaux) Soient P_1 et P_2 deux polynômes de $K[X]$ premiers entre eux et $P = P_1P_2$. Montrer que

$$\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u).$$

4 - Montrer que si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u alors les espaces propres associés sont en somme directe.

5 - Montrer que si P est un polynôme annulateur de u et λ une valeur propre de u alors λ est une racine de P.

On suppose à partir de maintenant que E est de dimension finie.

6 -

> Le **polynôme caractéristique** de u est le polynôme $\chi_u =$

7 - Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On note u_F l'endomorphisme induit par u sur F. Montrer que χ_{u_F} divise χ_u. Indication : considérer une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E tel que $(e_1, \dots, e_p)$ soit une base de F, puis la matrice de u dans cette base.

8 - Soit λ une valeur propre de u et E_λ l'espace propre associé.
Montrer que $\boxed{1 \leq \dim E_\lambda \leq m(\lambda)}$ où $m(\lambda)$ est la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u.

9 - ***Théorème de Cayley-Hamilton.***

10 - Le **polynôme minimal** de u est le polynôme m_u

11 - Montrer que $\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } u \text{ si et seulement si } m_u(\lambda) = 0}$

PARTIE II : Diagonalisation, trigonalisation

1 - Extrait du sujet 2, session exceptionnelle 2014 :

Partie A : préliminaires

1. Cette question consiste en des rappels de théorèmes du cours.
   1.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X], P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$.
      i. Donner une condition suffisante sur P pour que A soit trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
      ii. Donner une condition suffisante sur P pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   1.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X], P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$.
   Que deviennent les conditions précédentes lorsque l'on s'intéresse à la trigonalisation ou à la diagonalisation de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

2 - Rappeler une condition nécessaire et suffisante sur le polynôme minimal pour que u soit diagonalisable, puis la démontrer.

Diagonalisation. L'endomorphisme u de E est diagonalisable si et seulement si m_u est

3 - Rappeler une condition nécessaire et suffisante sur le polynôme minimal (et sur le polynôme caractéristique) pour que u soit trigonalisable, puis la démontrer.

Trigonalisation. L'endomorphisme u de E est trigonalisable si et seulement si m_u est
si et seulement si χ_u est

4 - On suppose que u est trigonalisable. Rappeler la définition des espaces caractéristiques de u, puis montrer que E est somme directe de ces espaces caractéristiques.

PARTIE III : sujet 2 Problème 1 Capes externe 2013

Problème 1 : puissances de matrices

Rappels et notations

Étant donnés deux entiers naturels non nuls p et q, $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes, à coefficients complexes.
L'ensemble $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{C})$ est noté $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et I_p désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
On identifiera par la suite $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^p$.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. Pour tout entier n, on note $A_n = (a_{ij}(n))_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$.
On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, si pour tout couple (i,j) tel que $i \in [\![1,p]\!]$ et $j \in [\![1,q]\!]$, la suite $(a_{i,j}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$.
En posant $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{i,j}(n)) = l_{i,j}$ et $L = (l_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$, on dit alors que la matrice L est la limite de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = L$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Pour tout entier naturel n, on note A^n la puissance n-ième de la matrice A.
Ce problème a pour but de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Partie A : étude d'un exemple

On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 \in \mathbb{R}\,,\ y_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{4}{5}x_n + \dfrac{2}{5}y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{5}x_n + \dfrac{3}{5}y_n \end{cases}$$

Dans cette partie, on pose $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ en fonction de A^n et de $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.
2. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que A puisse s'écrire :
$$A = PDP^{-1}$$
où P désigne la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression de A^n en fonction de n.
4. Etablir que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.
5. Démontrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer les limites de ces suites en fonction de x_0 et y_0.

Partie B : résultats préliminaires

Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

1. Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ qui convergent respectivement vers L et M.
   1.1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n + B_n) = L + M$.
   1.2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha A_n) = \alpha L$.

1.3. Soient $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes qui converge vers $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n B = \alpha B$.

2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ qui converge vers L.

2.1. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n X = LX$.

2.2. Énoncer sans démonstration un résultat analogue pour la multiplication à droite.

3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall X \in \mathbb{C}^p,\ \lim_{n\to+\infty} A_n X = 0$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 0$.

Partie C : condition nécessaire

Dans la suite du problème, on note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ représenté par la matrice A dans la base canonique.
On définit, pour tout entier naturel n, u^n par : $u^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^p}$ et $u^{n+1} = u \circ u^n$.
On suppose dans cette partie que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1. Soit λ une valeur propre de u ($\lambda \in \mathbb{C}$).

1.1. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

1.2. On suppose que $|\lambda| = 1$.
Montrer qu'alors $\lambda = 1$. *On pourra considérer* $\left|\lambda^{n+1} - \lambda^n\right|$.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{Id}) = \{0\}$.

Partie D : condition suffisante

On note $\chi_u(X) = \det(A - XI_p)$ le polynôme caractéristique de u, où det désigne le déterminant de la matrice considérée.

1. Énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss.

2. En déduire que l'on peut écrire $\chi_u(X) = \det(A - XI_p) = \prod\limits_{i=1}^{p} (\alpha_i - X)$, avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$ pour tout entier $i \in [\![1, p]\!]$.

3. Justifier le fait que u admet dans une certaine base $(e_1, ..., e_p)$ une matrice T de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \dots & \dots \\ & \alpha_2 & \dots & \dots \\ & & \ddots & \dots \\ 0 & & & \alpha_p \end{pmatrix}.$$

4. On suppose dans cette question que $|\alpha_i| < 1$ pour tout entier $i \in [\![1, p]\!]$.

4.1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n(e_1) = 0$.

4.2. Montrer par récurrence que pour tout entier $i \in [\![1, p]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n(e_i) = 0$.

4.3. En déduire la limite de T^n, puis celle de A^n.

5. On note $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les valeurs propres de u, deux à deux distinctes, avec $m \in \mathbb{N}^*$.
On suppose dans cette question que $\lambda_1 = 1$ et $|\lambda_i| < 1$ pour tout entier i tel que $2 \leqslant i \leqslant m$.
On suppose également que $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{Id}) = \{0\}$.

5.1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{Id})$ sont deux sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{C}^p$ stables par u.

5.2. On note u_1 l'endomorphisme de $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{Id})$ induit par u. Montrer que toute valeur propre de u_1 est une valeur propre de u, distincte de λ_1.

5.3. En remarquant que u_1 vérifie les hypothèses de la question 4, en déduire que A^n converge et déterminer une matrice semblable à sa limite.

Partie E : conclusion et application

1. On note $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les valeurs propres de A, deux à deux distinctes, avec $m \in \mathbb{N}^*$.
   Déduire des questions précédentes que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si :
   $$\begin{cases} \forall i \in [\![1, m]\!], |\lambda_i| < 1 \\ \text{ou} \\ \lambda_1 = 1, \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}) \cap \operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}) = \{0\} \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![2, m]\!], |\lambda_i| < 1 \end{cases}$$
2. Déterminer si la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, dans chacun des cas suivants :

   2.1. $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$

   2.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & \dfrac{i}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   2.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 + \dfrac{i}{2} & 9 \\ 0 & -4 & 6 + \dfrac{i}{2} \end{pmatrix}$

PARTIE IV : endomorphismes remarquables.

E désigne dans toute cette partie un espace vectoriel sur un corps commutatif K.

1 - Homothéties vectorielles : On appelle *homothétie vectorielle* de E de rapport $\lambda \in K^*$, l'endomorphisme h_λ de E défini pour tout $x \in E$ par $h_\lambda(x) = \lambda x$.

(a) Soit $\lambda \in K^*$. Supposons pour cette question que E est de dimension finie. Est-ce que la matrice de h_λ dépend de la base choisie ?

(b) Montrer que l'ensemble des homothéties $\{h_\lambda \colon \lambda \in K^*\}$ forme un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

(c) Soit u un endomorphisme de E tel que tout vecteur non nul de E est un vecteur propre de u. Montrer que u est une homothétie.

2 - Pour la suite, on considère F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Rappeler la définition d'être supplémentaires.

3 - Projections vectorielles :

(a) Soit p la *projection vectorielle* sur F parallèlement à G. Rappeler la définition et faire un dessin.

(b) Vérifier que $p^2 = p$.

(c) Que peut-on dire si $F = E$ ou si $G = E$?

(d) On suppose que $F \neq E$ et $G \neq E$. Interpréter F et G en termes d'espaces propres de p.

(e) On suppose que E est de dimension finie. Expliciter une matrice diagonale D qui sera la matrice de p dans une base bien choisie.

(f) On appelle *projecteur* de E un endomorphisme u tel que $u^2 = u$. En particulier, une projection vectorielle est un projecteur. Montrer réciproquement qu'un projecteur u est la projection vectorielle sur $\mathrm{Im}\, u$ parallèlement à $\ker u$.

(g) Exemple : soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 4 & 5 & 12 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Montrer que u est une projection vectorielle. Déterminer les axes associés à cette projection.

4 - Symétries vectorielles :

(a) Soit s la *symétrie vectorielle* par rapport à F parallèlement à G. Rappeler la définition et faire un dessin.

(b) Exprimer s en fonction de la projection p précédente.

(c) Vérifier que $s^2 = id_E$.

(d) Que peut-on dire si $F = E$ ou si $G = E$?

(e) On suppose que $F \neq E$ et $G \neq E$. Interpréter F et G en termes d'espaces propres de s.

(f) On suppose que E est de dimension finie. Expliciter une matrice diagonale D qui sera la matrice de s dans une base bien choisie.

(g) On appelle *involution* de E un endomorphisme v tel que $v^2 = id_E$. En particulier, une symétrie vectorielle est une involution. Montrer réciproquement qu'une involution v est la symétrie vectorielle par rapport à $\ker(v - id_E)$ parallèlement à $\ker(v + id_E)$.

(h) Exemple : soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -12 & 9 & -8 \\ -12 & 10 & -9 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Montrer que v est une symétrie vectorielle. Déterminer les axes associés à cette symétrie.