Correction rapide du devoir 1

Exercice 1. On vérifie que pour toutes formules ϕ et ψ, $\neg\phi$ est équivalente $(\phi \downarrow \phi)$ et $\phi \wedge \psi$ est équivalente $(\phi \downarrow \psi) \downarrow (\phi \downarrow \psi)$. On conclut alors par induction sur les formules.

Exercice 2. (a) Utiliser la formule $\forall y(xy = yx)$.

(b) Supposons $\mathcal{A}$ inductif. Soit $m > 0$ minimal tel que $m.1 = 0$. Alors σ l'application de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathcal{A}$ qui a $\bar{i}$ associe $i.1$ est un morphisme d'anneau injectif. Pour la surjectivité il suffit d'utiliser le fait que $\mathcal{A}$ est inductif avec la formule $\wedge_{0\leq i\leq n}(x = i.1)$.
La réciproque est évidente : pour tout $m > 0$, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est inductif.

(c) $\mathbb{R}$ n'est pas inductif : on utilise ici la formule $\exists y(x = y^2)$ qui n'est satisfaite que par les réels positifs.

(d) $\mathbb{Z}$ n'est pas inductif : on utilise ici la formule $\exists y\exists z\exists t\exists u(x = y^2 + z^2 + t^2 + u^2)$.

(e) Soit K un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Une partie $D \subset K$ définissable est finie ou cofinie : en effet une partie atomique de K correspond aux racines d'un polynôme (éventuellement nul dans $K[X]$) et si D_1 et D_2 sont deux parties de K telles que chacune est finie ou cofinie alors c'est encore vraie pour le complémentaire de D_1 et pour l'union de D_1 et D_2 ; par élimination des quanteurs on en déduit que c'est vraie pour toute partie définissable. Supposons que D satisfait l'hypothèse d'induction ($0 \in D$ et pour tout $x \in D$, $x + 1 \in D$). Alors D est infini car K est de caractéristique 0. Si $D \neq K$ alors il existerait $x \notin D$ mais alors pour tout n, $x - n.1 \notin D$ et D ne serait pas cofini.

Exercice 3. (a) Le premier axiome signifie qu'il existe un plus petit élément et que tout élément différent de ce plus petit élément a un prédécesseur. Le second axiome signifie que tout élément a un successeur. Ces deux axiomes sont évidemment satisfaits par $\langle \mathbb{N}, < \rangle$.

(b) $\langle 2\mathbb{N}, < \rangle$.

(c) $(1, 0)$ n'a pas de prédécesseur.

(d) Par compacité $\mathrm{Th}(\langle \mathbb{N}, < \rangle, \mathbb{N}) \cup \{n < c : n \in \mathbb{N}\}$ où c est une nouvelle constante, est consistant. Il existe donc α dans une extension élémentaire plus grand que tout entier de $\mathbb{N}$. Considérons le plus petit ensemble A contenant α clos par prédécesseur et successeur. Alors $\langle A, < \rangle$ est isomorphe à $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$: il suffit d'envoyer α sur 0 et par induction d'envoyer le prédécesseur d'un élément sur le prédécesseur de l'image de cet élément et de même pour le successeur, ceci donne un plongement qui est surjectif car tout élément de A a un prédécesseur.

(e) -i- Soit $\mathcal{M} \models T$. Pour tout $a \in M$ notons C_a la plus petite partie close par prédécesseur et successeur. Alors $C_a = C_b$ définit une relation d'équivalence. La classe C_0 contenant le plus petit élément est isomorphe à $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ et les autres classes sont toutes isomorphes à $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$. En notant X l'ensemble des classes distinctes de C_0 et en munissant X de l'ordre $C_a < C_b$ si $C_a \neq C_b$ et $a < b$ alors $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\mathcal{M}_X$ en recollant les isomorphismes.

Remarquons que l'on a seulement utilisé ici que $\mathcal{M}$ était un ordre total vérifiant les deux axiomes de (a).

-ii- On construit une chaîne d'ordres totaux $X = X_0 \subset X_1 \subset X_2 ...$ tel que pour tout $i \in \omega$, $\mathcal{M}_{X_i} \prec \mathcal{M}_{X_{i+1}}$ et tel qu'il existe $a \in X_{i+1}$ strictement plus petit que tous les éléments de X_i, $b \in X_{i+1}$ strictement plus grand que tous les éléments de X_i et pour tout $x < y$ dans X_i il existe $c \in X_{i+1}$ tel que $x < c < y$. Pour cela, on remarque que par compacité $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_{X_i}, M_{X_i}) \cup \{n < a < (x,0) : n \in \mathbb{N}, x \in X_i\} \cup \{(x,0) < b : x \in X_i\} \cup \{(x,n) < c_{x,y} < (y,n) : n \in \mathbb{Z}, x < y \in X_i\}$ est consistant.

Il existe donc $\mathcal{M}'$ une extension élémentaire de $\mathcal{M}_{X_i}$ qui contient un élément plus petit que tous les éléments de $X_i \times \mathbb{Z}$, un élément plus grand que tous les éléments de $X_i \times \mathbb{Z}$, et pour tout $x < y \in X_i$ un élement strictement compris entre $\{x\} \times \mathbb{Z}$ et $\{y\} \times \mathbb{Z}$. Cette structure est un ordre total vérifiant les deux axiomes de (a). Donc comme dans (i), par un isomorphisme au dessus de $\mathcal{M}_{X_i}$ on peut supposer que $\mathcal{M}' = \mathcal{M}_{X_{i+1}}$ pour un ordre total X_{i+1} qui vérifie les bonnes propriétés.

On termine en posant $Y = \cup_{i \in \omega} X_i$.

-iii- Si f est un isomorphisme partiel de $\langle X, < \rangle$ vers $\langle Y, < \rangle$ alors σ_f définit sur $\mathbb{N} \cup \mathrm{dom} f \times \mathbb{Z}$ par $\sigma_f(n) = n$ et $\sigma_f(x,m) = (f(x), m)$ est également un isomorphisme partiel de $\mathcal{M}_X$ vers $\mathcal{M}_Y$. On vérifie alors que la famille des isomorphismes partiels σ_f pour f a domaine fini est un va-et-vient.

-iv- Ce déduit de i, ii et iii. En effet par i et ii, $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ a une extension élémentaire isomorphe à un $\mathcal{M}_{Y_1}$ avec Y_1 dense sans extrémité. De même par ii, $\mathcal{M}_X$ a une extension élémentaire isomorphe à un $\mathcal{M}_{Y_2}$ avec Y_2 dense sans extrémité. Par iii, $\mathcal{M}_X \equiv \langle \mathbb{N}, < \rangle$.

-v- On a déjà remarqué que pour i, on a uniquement besoin des axiomes d'un ordre total et des deux axiomes de (a). Donc T est axiomatisée par ces axiomes.

Remarque sur exo3 (e) Pour décrire les modèles de T et donner une axiomatisation de T, on peut plus simplement enrichir le langage L par une constante 0 et une fonction S et considérer la théorie T' dans ce langage axiomatisée par les axiomes d'ordres totaux, les axiomes de (a), "0 est le plus petit élément" et S est la fonction successeur. On montre alors que T' élimine les quanteurs et on décrit facilement les modèles de T'. On en déduit l'axiomatisation de T et une description de ses modèles.

Exercice 2.6 Un ouvert est réunion d'ouverts de la forme $\langle \phi \rangle$. Si de plus il est fermé par compacité il est réunion finie d'ouverts de cette forme qui est alors un ouvert de cette forme.

Exercice 2.22 Les deux théories sont κ-catégoriques uniquement pour $\kappa = \omega$.

Exercice 2.23 2. va-et-vient entre les modèles contenant une infinité d'éléments dans aucun des P_i.