Correction rapide du devoir 2

Exercice 3.2. Soit $p \in S(\mathrm{Th}(\mathcal{M}))$. Alors $p = \mathrm{tp}(\bar{a})$ pour $\bar{a} \in \mathcal{N} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M})$. Par le théorème de l'extension élémentaire commune, on peut supposer que $\mathcal{N}$ est une extension élémentaire de $\mathcal{M}$. Si σ est une partie finie de p alors comme $\mathcal{N} \models \wedge_{\phi\in\sigma}\phi(\bar{a})$, $\mathcal{M} \models \exists\bar{x} \wedge_{\phi\in\sigma} \phi(\bar{x})$ et donc σ est réalisé dans $\mathcal{M}$.

Exercice 3.16. On définit par récurrence sur k la famille $(m_i)_{i\in\omega}$. Supposons que l'on a $(m_0, ..., m_{k-1})$ dans $\mathcal{M}$ tel que $(m_0, ..., m_{k-1})$ et $(n_0, ..., n_{k-1})$ ont même type. Alors il existe un automorphisme σ d'une extension élémentaire de $\mathcal{N}$ qui envoie $(n_0, ..., n_{k-1})$ sur $(m_0, ..., m_{k-1})$. Par ω-saturation le type de $\sigma(n_k)$ sur $(m_0, ..., m_{k-1})$ est réalisé dans $\mathcal{M}$. Soit m_k une de ses réalisations dans $\mathcal{M}$. Alors $(m_0, ..., m_{k-1}, m_k)$ et $(n_0, ..., n_{k-1}, n_k)$ ont même type.

Exercice 3.21. Soit n un entier. Pour $\phi(\bar{x})$ une formule, on note $\exists^{\geq n}\bar{x}\phi(\bar{x})$ la formule

$$\exists\bar{x}_1...\bar{x}_n((\wedge_{i\neq j}\bar{x}_i \neq \bar{x}_j) \wedge (\wedge_i\phi(\bar{x}_i)))$$

et $\exists^{=n}\bar{x}\phi(\bar{x})$ la formule

$$\exists^{\geq n}\bar{x}\phi(\bar{x}) \wedge \neg\exists^{\geq n+1}\bar{x}\phi(\bar{x}).$$

(a) On peut exprimer par l'énoncé suivant le fait d'avoir exactement k classes à n éléments :

$$\exists^{=k}x(\exists^{=n}yE(y,x)).$$

(b) Si $\mathcal{M}$ a des classes finies arbitrairement grandes alors pour tout n, $\mathcal{M} \models \exists^{\geq n}x(\exists^{\geq n}yE(y,x))$. Par compacité il existe donc une extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ contenant une infinité de classes infinies. Soient $(n_{i,j})_{(i,j)\in\omega^2}$ une famille d'éléments distincts de $\mathcal{N}$ telle que $\mathcal{N} \models E(n_{i,j}, n_{i',j'})$ ssi $i = i'$. En utilisant l'exercice 3.16, par ω-saturation il existe une telle famille dans $\mathcal{M}$.

(c) Soit $\mathcal{M}$ un modèle ω-saturé de T. Il y a deux cas :

1er cas : $\mathcal{M}$ a des classes finies arbitrairement grandes. Alors $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ est axiomatisée par l'ensemble des axiomes qui pour chaque entier n détermine le nombre de classes à n éléments (fini ou infini). En effet si $\mathcal{N}$ est un autre modèle ω-saturé de T ayant pour chaque entier n le même nombre de classes à n éléments alors d'après la question qui précède $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ ont toutes deux une infinité de classes infinies et il est facile de montrer qu'elles se correspondent par va-et-vient. Les théories complètes correspondant à ce premier cas sont en bijection avec les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ tel qu'il n'existe pas d'entier n à partir duquel f est nul. Il y a en particulier 2^ω théories complètes dans ce premier cas.

2ème cas : Il existe m tel que toute les classes finies ont au plus m éléments. Dans ce cas on peut exprimer combien il y a de classes infinies (c'est-à-dire à strictement plus de m éléments). La théorie $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ est alors axiomatisée par l'ensemble des axiomes qui pour chaque entier n détermine le nombre de classes à n éléments (fini ou infini) et qui détermine le nombre de classes infinies. Les théories complètes correspondant à ce second cas sont en bijection avec les fonctions $g : \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ tel qu'il existe m vérifiant $g(n) = 0$ pour tout entier $n > m$ et tel que $\sum_{i\in\mathbb{N}^*\cup\{\infty\}} g(i) = \infty$. Dans ce second cas il n'y a que ω théories complètes.

(d) Une théorie du premier cas n'est pas ω-catégorique : elle a ω modèles dénombrables à isomorphisme près : un modèle dénombrable à j classes infinies pour chaque $j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Une théorie du second cas est ω-catégorique : le nombre de classes pour chaque $i \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ étant déterminé.

(e) Les seuls théories κ-catégoriques (pour $\kappa > \omega$) sont celles du second cas qui vérifient ou bien $g(\infty) = 0$ et $g(n)$ est fini pour tout entier n sauf un, ou bien $g(\infty) = 1$ et $g(n)$ est fini pour tout entier n.

Exercice 3.33. $1 \Leftrightarrow 3$ et $1 \Rightarrow 2$ sont faciles. Pour (non 1) $\Rightarrow$ (non 2), on utilise un argument de compacité.

Exercice 3.35. Le point le moins évident est de montrer que $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A)) \subset \mathrm{acl}(A)$. Soit $a \in \mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A))$. Alors il existe une formule $\phi(x, \bar{b})$ algébrique, satisfaite par a et à paramètres $\bar{b} \in \mathrm{acl}(A)$. Il existe donc un entier n tel que $\mathcal{M} \models \exists^{\leq n} x \phi(x, \bar{b})$. Comme $\bar{b}$ est algébrique sur A, il existe $\psi(\bar{y}) \in L(A)$ algébrique satisfaite par $\bar{b}$. Alors la formule de $L(A)$,

$$\theta(x) = \exists \bar{y}(\psi(\bar{y}) \wedge (\exists^{\leq n} x \phi(x, \bar{y})) \wedge \phi(x, \bar{y}))$$

est satisfaite par a et est algébrique. Donc $a \in \mathrm{acl}(A)$.

Exercice 3.36. Soit p un n-type sur A algébrique et soit $\phi \in p$ algébrique. Toute réalisation de p satisfait ϕ. Comme ϕ est algébrique, il existe un nombre fini m de n-uples satisfaisant ϕ mais ayant un type sur A distinct de p. Chacun de ces uples satisfait une formule $\psi_i \in L(A)$ qui n'est pas dans p. Alors la formule $\phi \wedge \neg\psi_1 \wedge ... \wedge \neg\psi_m$ isole p.

Exercice 4.4 On peut énumérer les classes définies par les E_i de la manière suivante : $M = C_\emptyset$ l'unique classe définie par E_0, pour tout $i > 0$, on note $C_{j_1...j_i}$ pour $j_1...j_i$ suites finies de 0 et 1, les classes définies par E_i de telle façon que $C_{j_1...j_{i-1}} = C_{j_1...j_{i-1}0} \cup C_{j_1...j_{i-1}1}$. Soit pour tout $j_1...j_i$, un représentant $a_{j_1...j_i}$ de la classe $C_{j_1...j_i}$. L'ensemble A de ces représentants est dénombrable mais il y a 2^ω types sur A : en effet par compacité, pour toute suite $(j_i)_{i\in\omega}$ de 0 et 1, $\{E(x, a_{j_1...j_i}) : i \in \omega\}$ est consistant.

Afin de montrer que $\mathcal{M}$ est κ-stable pour tout $\kappa \geq 2^\omega$, on peut vérifier facilement que $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ élimine les quanteurs et en déduire que pour tout ensemble de paramètres A, $|S_1(A)| \leq \max\{2^\omega, |A|\}$.

Exercice 4.13

1. Soit $n > 0$. Soit $\mathcal{M} = \langle M, E_0, ..., E_{n-1}\rangle$ où les E_i sont des relations d'équivalences sur M telles que E_0 est l'égalité, pour chaque i, $E_i \subset E_{i+1}$ et toute classe définie par E_{i+1} est composée d'une infinité de classes définies par E_i, et E_{n-1} a une infinité de classes. On vérifie facilement par induction que pour chaque $a \in \mathcal{M}$, et chaque i, $\mathrm{RM}(E_i(x, a)) \geq i$. D'où $\mathrm{RM}(M) \geq n$. On vérifie aussi facilement que $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ élimine les quanteurs. En remarquant que toute partie définissable de M est combinaison booléenne de classes d'équivalences on en déduit que $\mathrm{RM}(E_i(x, a)) = i$ et $\mathrm{RM}(M) = n$.
2. Soit $\mathcal{N} = \langle N, P_n, E_i^n : n > 0, i \in \{0, .., n-1\}\rangle$ où les P_j sont des parties disjointes de N et où pour chaque n, les E_i^n sont des relations d'équivalence sur P_n vérifiant les propriétés du 1. On vérifie alors que $\mathrm{RM}(P_n) = n$. Donc $\mathrm{RM}(N) \geq \omega$. En utilisant l'élimination des quanteurs, on vérifie que $\mathrm{RM}(N) = \omega$.

Exercice 4.19 $\mathrm{RM}(D) \geq \alpha+1$. Il existe donc dans une extension élémentaire $\mathcal{N}$ une famille infinie $(D'_i)_{i\in\omega}$ de parties de D définissables et deux à deux disjointes telle que pour tout $i \in \omega$, $\mathrm{RM}(D'_i) \geq \alpha$. Alors D est défini par une formule $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ où $\bar{a} \in M$ et pour $i \in \omega$, D'_i est défini par une formule $\phi_i(\bar{x}, \bar{a}'_i)$ où $\bar{a}'_i \in N$. Alors par l'exo 3.16, il existe des $\bar{a}_i \in \mathcal{M}$ tel que pour tout $k \in \omega$, $\bar{a}_0 ... \bar{a}_k$ et $\bar{a}'_0 ... \bar{a}'_k$ ont même type sur $\bar{a}$. Les D_i définis par les formules $\phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i)$ répondent à la question.

Exercice 4.23 Soit $\phi \in L(A)$. Soit

$$\Sigma = \{\psi(\bar{x}) \in L(A) : \mathrm{RM}(\phi \wedge (\neg\psi)) < \mathrm{RM}(\phi)\}.$$

On vérifie facilement par compacité que Σ est consistant et on remarque que tout type sur A qui contient Σ a même rang que ϕ. D'où

$$\mathrm{RM}(\phi) = \max\{\mathrm{RM}(p) : p \in S(A),\ \phi \in p\}.$$

On peut de plus remarquer que si ϕ ne se découpe pas en deux formules de $L(A)$ de même rang que ϕ alors Σ est en fait un type complet et donc ϕ ne contient qu'un seul type complet de même rang. On en déduit que

$$\mathrm{dM}(\phi) = \sum\{\mathrm{dM}(p) : p \in S(A),\ \phi \in p,\ \mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(\phi)\}.$$

Exercice 4.25 $\Leftarrow$ Par le lemme 4.24, $\mathrm{RM}(q) \geq \alpha+1$. Donc $\mathrm{RM}(p) \geq \mathrm{RM}(q) \geq \alpha+1$.
$\Rightarrow$ Soit $\mathcal{N}$ une extension élémentaire ω-saturée. Soit

$$\Sigma = \{\psi(\bar{x}) \in L(N) : \text{ il existe } \phi \in p; \mathrm{RM}(\phi \wedge (\neg\psi)) < \mathrm{RM}(p)\}.$$

De même que dans l'exercice précédent Σ est consistant. Soit q un type sur N contenant Σ, alors q contient p et a même rang que celui-ci. Si $\theta \in q$ alors θ est donc de rang supérieur à $\alpha+1$. Comme $\mathcal{N}$ est ω-saturée, cette formule se découpe en plusieurs formules de rang supérieur à α et contient donc un type de rang supérieur à α distinct de q. Le type q est donc point d'accumulation de types dans $S_n(N)$ de rang supérieur ou égal à α.

Exercice 4.30 Utiliser 4.24 et 4.23 pour les deux premiers points. Utiliser de plus 4.19 pour le dernier point.

Exercice 4.37 Cohérence : si $\{a_1, ..., a_n\} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C B$ alors évidemment $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C B$. Réciproquement supposons $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C B$ et $\bar{a}' \subset \{a_1, ..., a_n\}$. Pour tout $\bar{b} \in B$, $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C \bar{b}$, donc par symétrie $\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C \bar{a}$ et par caractère fini $\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C \bar{a}'$ et donc $\bar{a}' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C \bar{b}$. Par conséquent par le caractère fini $\bar{a}' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C B$. D'où $\{a_1, ..., a_n\} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C B$. La monotonie, transitivité et symétrie se vérifie facilement.

Exercice 1 (Conditions de chaînes dans les groupes stables).

(a) Sinon pour $(c_i)_{i\in\omega}$ et $(d_j)_{j\in\omega}$ des nouvelles constantes, l'ensemble d'énoncés

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) \cup \{\phi(c_i, d_j) : i \geq j\} \cup \{\neg\phi(c_i, d_j) : i < j\}$$

est finiment consistant. Donc $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ a la propriété de l'ordre et est donc instable.

(b) -i- Soit $\phi(x,\bar{y})$ une formule telle que pour tout i, H_i est définie par $\phi(x,\bar{b}_i)$ pour un paramètre $\bar{b}_i$. Par stabilité il existe un entier n tel qu'il n'existe pas $a_1,...,a_{n+1}$ et $i_1,....,i_{n+1}$ tel que $\phi(a_k,b_{i_j})$ si et seulement si $k \leq j$. Soient $i_1,...,i_{n+1}$ alors l'intersection des groupes H_{i_1}, H_{i_2},..., $H_{i_{n+1}}$ est égale à l'intersection de n d'entre eux. Sinon soit $h_k \in \cap_{j\neq k} H_{i_j} \setminus H_{i_k}$ pour tout $k \in \{1,...,n+1\}$. On définit alors $a_1 = e$, $a_2 = h_1$, ...,$a_{n+1} = h_1...h_n$. Alors $\phi(a_k,b_{i_j})$ si et seulement si $k \leq j$.

On déduit de cela que toute intersection finie de sous-groupes H_i est égale à l'intersection de n d'entre eux. Les intersections finies de H_i sont donc uniformément définissables par la formule $\phi(x,\bar{y}_1) \wedge ... \wedge \phi(x,\bar{y}_n)$.

-ii- Par (a) et (b) il n'y a pas de chaînes infinies d'intersections finies de H_i, donc l'intersection des H_i correspond à une des intersections finies de H_i, c'est-à-dire à n d'entre-eux (l'entier n étant identique à celui du -i-).

-iii- $C(A) = \cap_{a\in A} C(\{a\})$. Les $C(\{a\})$ sont uniformément définissable donc d'après -ii-, il existe n et $a_1,...,a_n \in A$ tel que $C(A) = C(\{a_1,...,a_n\})$. Par conséquent $C(A)$ est définissable. (Notons que n est indépendant de A, il ne dépend que de la formule $xy = yx$ (voir -i-).)

(c) -i- facile.

-ii- **Attention : il manque une hypothèse dans la question ; on suppose H définissable**. Comme H est définissable les aH sont uniformément définissables. Donc I est égal à une intersection finie de aH et comme H est d'indice fini, I aussi.

-iii- Comme K est un corps et par -ii- $H \neq \{0\}$, $H = K$.

(d) -i- On a $f(\bar{m}) \in \mathrm{acl}(\{\bar{m}\} \cup A)$, donc $\mathrm{RM}(f(\bar{m})/A) \leq \mathrm{RM}(\bar{m}f(\bar{m})/A) = \mathrm{RM}(\bar{m}/A)$.

-ii- Soit $B \supset A$ tel que D est définissable à paramètre dans B. Alors $f(D)$ est aussi définissable à paramètres dans B. De plus comme f est bijective, f^{-1} est aussi définissable à paramètres dans A. Donc en appliquant -i- dans une extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ réalisant les types de rang maximaux dans D et dans $f(D)$, on a

$$\mathrm{RM}(D) = \max\{\mathrm{RM}(\bar{m}/A) : \bar{m} \in D^{\mathcal{N}}\} = \max\{\mathrm{RM}(f(\bar{m})/A) : \bar{m} \in D^{\mathcal{N}}\} = \mathrm{RM}(f(D)).$$

(e) G est ω-stable donc totalement transcendant.

-i- Pour tout $h \in H$, par (d) , $\mathrm{RM}(hK) = \mathrm{RM}(K)$. Donc si K est d'indice infini dans H, $\mathrm{RM}(H) > \mathrm{RM}(K)$. Sinon $\mathrm{RM}(H) = \mathrm{RM}(K)$ et $\mathrm{dM}(H) = \mathrm{dM}(h_1K) + .. + \mathrm{dM}(h_nK)$ où $(h_1,...,h_n)$ est une famille de représentant des classes à gauche de H/K. Toujours par (d), il est facile de vérifier que $\mathrm{dM}(hK) = \mathrm{dM}(K)$, donc $\mathrm{dM}(H) = \mathrm{dM}(K)[H:K]$ pour tout $h \in H$.

-ii- S'il y avait une suite infinie strictement décroissante de sous-groupes définissables de G comme le degré de Morley est à valeur dans $\mathbb{N}$, par -i- il y aurait une suite strictement décroissante de sous-groupes définissables $(H_i)_{i\in\omega}$ de G tel que H_{i+1} est d'indice infini dans H_i. Par -i-, $(\mathrm{RM}(H_i))_{i\in\omega}$ serait une suite strictement décroissante d'ordinaux.

-iii- Par -ii- une intersection de sous-groupes définissables est égale à une sous-intersection finie car toute sous-intersection finie est définissable, et est donc définissable.

(f) -i- $(n!\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite strictement décroissantes de sous-groupe définissable donc $\mathbb{Z}$ n'est pas ω-stable. (Notons que cette famille n'est pas uniformément définissable ; $\langle\mathbb{Z},+\rangle$ est en fait stable).

-ii- Soit $\sigma \in \mathcal{F}$ et $a \in G/D$. Ou bien il existe entier $n > 0$ tel que $na \in \mathrm{dom}\sigma$. Dans ce cas supposons n minimal et posons $b = na$. Alors il existe $a' \in G$ tel que $p(a') = a$ et $na' = \sigma(b)$ car D est divisible. On peut alors prolonger σ en envoyant a sur a'. Ou bien pour tout $n > 0$, $na \notin \mathrm{dom}\sigma$. Alors on prolonge σ en envoyant a sur n'importe quel a' vérifiant $p(a') = a$.

En utilisant le lemme de Zorn, il existe un élément maximal dans $\mathcal{F}$ et cet élément est alors un isomorphisme s de G/D vers G tel que $p \circ s = id_{G/D}$.

On vérifie facilement que l'application qui à $(d, a) \in D \times G/D$ associe $d + s(a) \in G$ est un isomorphisme.

-iii- On considère la suite décroissante $(n!G)_{n\in\omega}$. Par (e)-ii-, cette suite est constante à partir d'un certain n. Par conséquent mG est divisible pour $m = n!$. Donc $G = mG \oplus G/mG$. De plus tout élément de G/mG est d'ordre au plus m, donc G/mG est d'exposant borné par m.