Chapitre 2

Compacité, Théorème de Löwenheim-Skolem

Ce chapitre est consacré à un théorème fondamental en théorie des modèles, le théorème de compacité et à ses premières conséquences. Commençons par énoncer ce théorème qui sera démontré dans le paragraphe suivant (2.2).

2.1 Enoncés du théorème de compacité

Théorème 2.1 (Compacité). *Soit* Σ *un ensemble d'énoncés tel que tout sous-ensemble fini de* Σ *a un modèle. Alors* Σ *a un modèle.*

Exercice 2.2. Montrer que l'énoncé suivant est équivalent au théorème de compacité : soient Σ un ensemble d'énoncés et ϕ une conséquence de Σ ($\Sigma \vdash \phi$) alors ϕ est conséquence d'une partie finie de Σ.

Exercice 2.3.

1. Une théorie qui, pour tout entier n, a un modèle de cardinalité plus grand que n, a un modèle infini.
2. Il n'existe pas de théorie dans la langage L_{ord} dont les modèles sont précisément les ordres finis.
3. Il n'existe pas de théorie dans la langage L_{ann} dont les modèles sont précisément les corps finis.

Le théorème de compacité s'exprime topologiquement de la façon suivante : nous munissons l'ensemble $\mathcal{T}$ des théories complètes dans le langage L d'une topologie. A tout énoncé ϕ, on associe l'ensemble $\langle\phi\rangle$ des théories complètes contenant ϕ. Alors les $\langle\phi\rangle$ forment une base d'ouverts pour une topologie, car si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux énoncés, $\langle\phi_1\rangle \cap \langle\phi_2\rangle = \langle\phi_1 \wedge \phi_2\rangle$. Muni de cette topologie, $\mathcal{T}$ est un espace séparé : si T_1 et T_2 sont deux théories complètes distinctes alors il existe un énoncé $\phi \in T_1$ tel que $\phi \notin T_2$. Donc $\langle\phi\rangle$ et $\langle\neg\phi\rangle$ sont des voisinages disjoints respectivement de T_1 et T_2. Cet espace

$\mathcal{T}$ est de plus totalement discontinu, c'est-à-dire il admet une base d'ouverts qui sont fermés : le complémentaire de $\langle\phi\rangle$ est $\langle\neg\phi\rangle$. Par conséquent, toute partie connexe de $\mathcal{T}$ est soit vide, soit réduite à un point.

Théorème 2.4 (Compacité). *L'espace $\mathcal{T}$ des théories complètes dans le langage L est compact.*

Exercice 2.5. Les deux énoncés ci-dessus du théorème de compacité sont équivalents.

Exercice 2.6. Les ouverts-fermés de $\mathcal{T}$ sont les parties de la forme $\langle\phi\rangle$ pour ϕ un énoncé de $\mathcal{T}$.

Regardons maintenant un corollaire du théorème de compacité en termes d'ensembles définissables.

Corollaire 2.7 (Compacité). *Soit $\mathcal{M}$ une L-structure et $(\phi_i(\bar{x}, \bar{m}_i))_{i\in I}$. Si pour toute partie finie I_0 de I, il existe $\bar{a} \in M^n$ tel que pour tout $i \in I_0$, $\mathcal{M} \models \phi_i(\bar{a}, \bar{m}_i)$ alors il existe une extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ et $\bar{a} \in N^n$ tel que pour tout $i \in I$, $\mathcal{N} \models \phi_i(\bar{a}, \bar{m}_i)$.*

En d'autres termes, si $(D_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de M^n définissables dans $\mathcal{M}$ tel que toute intersection finie de parties de cette famille est non vide dans la structure $\mathcal{M}$ alors cette famille a une intersection non vide dans une extension élémentaire de $\mathcal{M}$.

Démonstration. Soit $\bar{c}$ un n-uple de nouvelle constante. Considérons l'ensemble d'énoncés

$$\Sigma := \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) \cup \{\phi_i(\bar{c}, \bar{m}_i) : i \in I\}$$

dans le langage $L \cup \{m : m \in M\} \cup \{\bar{c}\}$. Alors par hypothèse, pour toute partie finie de Σ, il existe $\bar{a} \in M^n$ telle $\langle M, L, m, \bar{a} : m \in M\rangle$ soit modèle de cette partie finie. Donc par le théorème de compacité Σ est consistant. Soit $\mathcal{N}$ un modèle de Σ alors l'interprétation des constantes $\{m : m \in M\}$ forme une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}'$, la structure sur N réduite au langage L. Cette sous-structure est isomorphe à $\mathcal{M}$ car $\mathcal{N} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M)$. Par un isomorphisme, on peut donc supposer que $\mathcal{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}'$ et l'interprétation $\bar{a} \in N^n$ de $\bar{c}$ dans $\mathcal{N}$ implique que pour tout $i \in I$, $\mathcal{N}' \models \phi_i(\bar{a}, \bar{m}_i)$. $\square$

Exemple 2.8.

1. **Les entiers non-standards** : il existe une extension élémentaire de la structure $\langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot\rangle$ contenant un entier (non-standard) non nul qui est divisible par tous les entiers standards non nuls (les entiers de $\mathbb{N}^*$).
2. **Les réels non-standards** : il existe une extension élémentaire $\mathbb{R}'$ de la structure $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <\rangle$ contenant un réel c (non-standard) strictement positif qui est **infiniment petit**, c'est-à-dire tel que pour tout réel r standard strictement positif ($r \in \mathbb{R}$, $r > 0$), $0 < c < r$. On a alors pour tout $r' \in \mathbb{R}'$ **borné** (tel qu'il existe $r_0 \in \mathbb{R}$ avec $-r_0 < r' < r_0$), il existe un unique réel standard $r \in \mathbb{R}$ **infiniment proche** de r'. On appelle r la **partie standard** de r'.

2.2 Ultraproduits - Une démonstration du théorème de compacité

Définition 2.9. Soit I un ensemble non vide. Un ensemble F de parties de I est un **filtre** sur I si :
- $I \in F$ et $\emptyset \notin F$,
- si $X, Y \in F$ alors $X \cap Y \in F$,
- si $X \in F$ et $X \subset Y$ alors $Y \in F$.

Un **ultrafiltre** est un filtre maximal pour l'inclusion.

Exercice 2.10. Un filtre U sur I est un ultrafiltre ssi pour toute partie A de U, A ou $I - A$ est dans U.

Exercice 2.11. Tout filtre sur I est contenu dans un ultrafiltre. (On utilisera le lemme de Zorn).

A l'aide d'un ultrafiltre, on peut construire de nouvelles structures à partir d'une famille de structures donnée :

Définition 2.12. Soit $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ une famille de L-structures et U un ultrafiltre sur I. L'ultraproduit $\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/U$ est la structure $\mathcal{M}$ suivante :

1. le domaine de $\mathcal{M}$ est le produit des M_i modulo la relation d'équivalence suivante :

$$(a_i)_{i\in I} \sim (b_i)_{i\in I} \text{ si et seulement si } \{i \in I : a_i = b_i\} \in U.$$

   Cette relation est de manière évidente réflexive et symétrique. La transitivité découle du fait que U est un filtre : on a $\{i \in I : a_i = c_i\} \supset \{i \in I : a_i = b_i\} \cap \{i \in I : b_i = c_i\}$. On notera $[a_i]_{i\in I}$ la classe modulo U de l'uple $(a_i)_{i\in I}$.
2. pour toute constante $c \in L$, on pose $c^{\mathcal{M}} := [c^{\mathcal{M}_i}]_{i\in I}$.
3. pour toute fonction n-aire f de L, on pose

$$f^{\mathcal{M}} : ([a_i^1]_{i\in I}, \dots, [a_i^n]_{i\in I}) \mapsto [f^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n)]_{i\in I}.$$

4. pour toute relation n-aire R de L, on pose

$$R^{\mathcal{M}} := \{([a_i^1]_{i\in I}, \dots, [a_i^n]_{i\in I}) \in M^n : \{i \in I : (a_i^1, \dots, a_i^n) \in R^{\mathcal{M}_i}\} \in U\}.$$

Exercice 2.13. Vérifier que les fonctions et relations sont biens définies, c'est-à-dire qu'elle ne dépendent pas du choix des représentants. Noter de plus que la définition de $=^{\mathcal{M}}$ correspond à la vrai égalité sur M.

Théorème 2.14 (Critère de Łos). *Soit U un ultrafiltre sur I et $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ une famille de L-structures. Si $\bar{m} = ([m_i^1]_{i\in I}, ..., [m_i^n]_{i\in I})$ est un n-uple dans l'ultraproduit $\mathcal{M} := \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/U$ et $\phi(\bar{x})$ est une formule, alors*

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ si et seulement si } \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \phi(m_i^1, ..., m_i^n)\} \in U.$$

En particulier si θ est un énoncé alors $\mathcal{M}$ est modèle de cet énoncé si et seulement si il existe $X \in U$ tel que pour tout $i \in X$, $\mathcal{M}_i$ est un modèle de θ.

Démonstration. On commence par vérifier par induction sur la construction des termes que si $t(\bar{x})$ est un terme alors

$$t^{\mathcal{M}}(\bar{m}) = [t^{\mathcal{M}_i}(m_i^1, ..., m_i^n)]_{i \in I}.$$

Par définition de l'ultraproduit, c'est évident si $t(\bar{x})$ est une constante ou une variable. Soient $t_1(\bar{x}), ..., t_k(\bar{x})$ des termes pour lesquels la propriété est vérifiée et $f \in L$ une fonction k-aire. Par hypothèse de récurrence, pour tout $j \in \{1, ..., k\}$,

$$t_j^{\mathcal{M}}(\bar{m}) = [t_j^{\mathcal{M}_i}(m_i^1, ..., m_i^n)]_{i \in I},$$

et par définition de l'ultraproduit,

$$\begin{array}{rcl} (f(t_1, ..., t_n))^{\mathcal{M}}(\bar{m}) & = & f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{m}), ..., t_n^{\mathcal{M}}(\bar{m})) \\ & = & [f^{\mathcal{M}_i}(t_1^{\mathcal{M}_i}(m_i^1, ..., m_i^n), ..., t_n^{\mathcal{M}_i}(m_i^1, ..., m_i^n))]_{i \in I} \\ & = & [f(t_1, ..., t_n)^{\mathcal{M}_i}(m_i^1, ..., m_i^n))]_{i \in I}. \end{array}$$

On vérifie maintenant le critère de Łos par induction sur la construction des formules. Par définition de l'ultraproduit et par ce qui précède le critère est évident pour les formules atomiques.

Supposons le critère vérifié pour deux formules $\phi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$. Alors $\mathcal{M} \models (\phi \wedge \psi)(\bar{m})$ ssi $X := \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \phi(m_i^1, ..., m_i^n)\} \in U$ et $Y := \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \psi(m_i^1, ..., m_i^n)\} \in U$. Comme U est un filtre, $X \in U$ et $Y \in U$ est équivalent à $X \cap Y \in U$. Or $X \cap Y = \{i \in I : \mathcal{M}_i \models (\phi \wedge \psi)(m_i^1, ..., m_i^n)\} \in U$, donc le critère est alors vérifié pour $(\phi \wedge \psi)$.

On a aussi $\mathcal{M} \models \neg\phi(\bar{m})$ ssi $X \notin U$. Comme U est un ultrafiltre $X \notin U$ ssi $I \setminus X \in U$. Or $I \setminus X = \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \neg\phi(m_i^1, ..., m_i^n)\}$, donc le critère est également vérifié pour $\neg\phi$.

Supposons maintenant le critère vérifié pour une formule $\phi(y, \bar{x})$. Soit $X := \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \exists y \phi(y, m_i^1, ..., m_i^n)\}$. Si $\mathcal{M} \models \exists y \phi(y, \bar{m})$ alors il existe $[\bar{m}_i^0]_{i \in I} \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \phi([\bar{m}_i^0]_{i \in I}, [\bar{m}_i^1]_{i \in I}, ..., [\bar{m}_i^n]_{i \in I})$. Par hypothèse, $Y := \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \phi(m_i^0, m_i^1, ..., m_i^n)\} \in U$. Donc $X \in U$ car $X \supset Y \in U$. Réciproquement, si $X \in U$, choisissons pour tout $i \in I$, $m_i^0 \in \mathcal{M}_i$ tel que si $\mathcal{M}_i \models \exists y \phi(y, m_i^1, ..., m_i^n)$ alors $\mathcal{M}_i \models \phi(m_i^0, m_i^1, ..., m_i^n)$. Alors $\{i \in I : \mathcal{M}_i \models \phi(m_i^0, m_i^1, ..., m_i^n)\} = X$ et donc, par hypothèse, $\mathcal{M} \models \phi([\bar{m}_i^0]_{i \in I}, [\bar{m}_i^1]_{i \in I}, ..., [\bar{m}_i^n]_{i \in I})$. Le critère est donc alors vérifier pour la formule $\exists y \phi$. □

Démonstration du **théorème de compacité**. Considérons Σ un ensemble d'énoncé finiment consistant et pour toute partie finie i de Σ, soit $\mathcal{M}_i$ un modèle de i. Nous allons montrer en utilisant le critère de Łos qu'un ultraproduit des $\mathcal{M}_i$ est modèle de Σ.

Soit I l'ensemble des parties finies de Σ, et pour tout $i \in I$, soit $I_i := \{j \in I : j \supset i\}$. Alors $F := \{X \subset I : X \supset I_i \text{ pour un } i \in I\}$ est un filtre sur I. En effet : $I_{\{\emptyset\}} = I \in F$; $\emptyset \notin F$; si $X \supset I_i$ et $Y \supset I_j$ alors $X \cap Y \supset I_{i \cup j}$; si $X \supset I_i$ et $X \subset Y$ alors $Y \supset I_i$.

Soit U un ultrafiltre contenant F et $\mathcal{M}$ l'ultraproduit $\prod_{i \in I} \mathcal{M}_i / U$. Alors $\mathcal{M}$ est un modèle de Σ : en effet pour $\theta \in \Sigma$, $\mathcal{M}_i \models \theta$ pour tout $i \in I_{\{\theta\}}$, donc par le critère de Łos $\mathcal{M} \models \theta$. □

2.3 Théorème de l'extension élémentaire commune

Lemme 2.15. *Si $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont deux L-structures élémentairement équivalentes, elles ont une extension élémentaire "commune" : il existe une L-structure $\mathcal{N}$ telle que $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ se plongent élémentairement dans $\mathcal{N}$.*

Démonstration. On peut supposer que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Considérons l'ensemble d'énoncés $\Sigma := \mathrm{Th}(\mathcal{M}_1, M_1) \cup \mathrm{Th}(\mathcal{M}_2, M_2)$ dans le langage $L \cup \{m_1 : m_1 \in M_1\} \cup \{m_2 : m_2 \in M_2\}$. Remarquons que les modèles de Σ correspondent aux extensions élémentaires communes à $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$. Nous allons donc montrer que Σ est consistant. Par compacité, il est suffisant de montrer que tout fragment fini de Σ est consistant. Un fragment fini de Σ est équivalent à la conjonction d'un énoncé $\theta_1(\bar{m}_1)$ de $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_1, M_1)$ et d'un énoncé $\theta_2(\bar{m}_2)$ de $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_2, M_2)$. Alors $\mathcal{M}_1 \models \exists \bar{x} \theta_2(\bar{x})$ car $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont élémentairement équivalente et $\mathcal{M}_2 \models \theta_2(\bar{m}_2)$. Soit $\bar{m}_2' \in M_1$, tel que $\mathcal{M}_1 \models \theta_2(\bar{m}_2')$. Alors en interprétant $\bar{m}_2$ par $\bar{m}_2'$ dans M_1, on fait de $\langle \mathcal{M}_1, L, \bar{m}_1, \bar{m}_2' \rangle$ un modèle de $\theta_1(\bar{m}_1) \wedge \theta_2(\bar{m}_2)$. □

Théorème 2.16. *Si $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ est une famille de L-structures élémentairement équivalentes, ces structures ont une extension élémentaire "commune".*

Démonstration. Considérons ici l'ensemble d'énoncés $\Sigma := \cup_{i \in I} \mathrm{Th}(\mathcal{M}_i, M_i)$. En itérant le lemme précédent, pour toute partie finie I_0 de I, $\cup_{i \in I_0} \mathrm{Th}(\mathcal{M}_i, M_i)$ est consistant. On déduit par compacité que Σ est consistant. □

2.4 Théorème de Löwenheim-Skolem - Théories κ-catégoriques

Lemme 2.17 (Löwenheim-Skolem ascendant). *Si $\mathcal{M}$ est une L-structure infinie alors pour tout cardinal $\kappa \geq \max\{|L|, |M|\}$, il existe une extension élémentaire $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ de cardinal κ.*

Démonstration. Montrons d'abord qu'il existe une extension élémentaire $\mathcal{N}_0$ de $\mathcal{M}$ de cardinal supérieur ou égal à κ. Pour cela considérons $(c_i)_{i \in \kappa}$ des nouveaux symboles de constantes et l'ensemble d'énoncés

$$\Sigma := \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) \cup \{c_i \neq c_j : i \neq j\}.$$

Chaque fragment fini de Σ ne mentionne qu'un nombre fini de constantes, qui peuvent être interprétés par des éléments distincts de $\mathcal{M}$ car $\mathcal{M}$ est infini. Donc Σ est finiment consistant et donc consistant par compacité. Un modèle $\mathcal{N}_0$ de Σ est alors une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ de cardinal supérieur ou égal à κ. Par Löwenheim-Skolem descendant, il existe une sous-structure élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{N}_0$ contenant M et de cardinal κ, qui est alors une extension élémentaire de $\mathcal{M}$. □

Proposition 2.18. *1. La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique p fixé ($p \geq 0$) est complète.*

2. *Soit ϕ un énoncé dans le langage des anneaux. Alors ϕ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique nulle si et seulement si ϕ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, pour tout p premier sauf un nombre fini.*

Démonstration. 1. Soient k_1 et k_2 deux corps algébriquement clos de même caractéristique. Considérons K_1 et K_2 des extensions élémentaires non dénombrables respectivement de k_1 et k_2 ; Alors K_1 et K_2 sont deux corps algébriquement clos de même caractéristique et de degré de transcendance infini. Par 1.9, ils se correspondent par va-et-vient et donc sont élémentairement équivalents. Par conséquent k_1 et k_2 sont élémentairement équivalents.

2. Soit ϕ un énoncé et CAC_0 la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique 0. Considérons $\Sigma = \mathrm{CAC}_0 \cup \{\phi\}$. Si ϕ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique assez grande alors chaque partie finie de Σ a un modèle, car elle ne peut contenir qu'un nombre fini d'axiomes du type $1 + ... + 1 \neq 0$. Par compacité, Σ a un modèle qui est donc un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et donc ϕ est vraie dans tous les corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

   Réciproquement, si ϕ est conséquence de CAC_0 alors par compacité, il est conséquence d'une partie finie de CAC_0 et on conclut facilement.

□

Convention. Le cardinal d'une théorie T dans un langage L, notée $|T|$ est par convention le cardinal de l'ensemble des formules du langage L, c'est-à-dire $|T| := \max\{\omega, |L|\}$. En particulier on dit que T est dénombrable si $|L| \leq \omega$.

Théorème 2.19 (Théorème de Löwenheim-Skolem). *Si T est une théorie qui a un modèle infini alors pour tout cardinal $\kappa \geq |T|$, T a un modèle de cardinal κ.*

Démonstration. Par Löwenheim-Skolem ascendant et descendant, il existe une structure N de cardinal κ élémentairement équivalente à M. □

Définition. Une théorie T est κ-catégorique si T a un unique modèle à isomorphisme près de cardinal κ.

Proposition 2.20. *Une théorie T qui n'a que des modèles infinis et qui est κ-catégorique pour un cardinal $\kappa \geq |T|$ est complète.*

Démonstration. Soit M le modèle de T de cardinal κ. Toujours par Löwenheim-Skolem ascendant et descendant, tout modèle de T est élémentairement équivalent à une structure de cardinal κ, donc à M. □

Exemple 2.21. – La théorie des ensembles infinis est **totalement catégorique** (c.à.d. κ-catégorique pour tout cardinal infini).

- La théorie des ordres totaux denses sans extrémité est ω-catégorique (voir exo 1.25). Par contre cette théorie n'est pas κ-catégorique pour tout cardinal $\kappa > \omega$. Considérons par exemple un ordre I total dense sans extrémité de cardinal κ tel que pour chaque point de cet ordre, il y a κ points plus grand. Prolongeons cet ordre par l'ensemble des rationnels. Alors les ordres I et $I \frown \mathbb{Q}$ ne sont évidemment pas isomorphes.
- Soit $p \geq 0$. La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique p est catégorique en tout cardinal infini non-dénombrable. En effet si K_1 et K_2 sont deux corps algébriquement clos de caractéristique p et de cardinal $\kappa > \omega$, ils sont tous deux de degré de transcendance κ et donc isomorphes. Par contre cette théorie n'est pas ω-catégorique : la clôture algébrique du corps premier et le corps algébriquement clos de degré de transcendance 1 ne sont pas isomorphes.
- La théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion non triviaux est également catégorique en tout cardinal infini non-dénombrable. En effet tout groupe abélien divisible sans torsion peut être regardé comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et un groupe abélien divisible sans torsion de cardinal $\kappa > \omega$ aura pour dimension κ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Par contre cette théorie n'est pas ω-catégorique.

Exercice 2.22. Déterminer les cardinaux κ pour lesquels la théorie de la relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies est κ-catégorique. Même question pour la théorie de la relation d'équivalence à deux classes infinies.

Exercice 2.23. Soit $L = \{P_i : i \in \omega\}$ où les P_i sont des relations unaires. Soit T la théorie dans le langage L qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints et que chaque P_i est infini.

1. Vérifier que T n'est catégorique en aucun cardinal κ.
2. Montrer que T est complète.

Pour terminer ce chapitre nous allons énoncer le théorème de Morley qui est le point de départ de la théorie de la stabilité ("seconde naissance de la théorie des modèles"). La démonstration de ce théorème ne sera pas faite dans ce cours, mais on étudiera les notions de rang de Morley et d'ensembles fortement minimaux qui sont utilisés dans celle-ci :

Fait 2.24 (Théorème de Morley 1965). *Une théorie dénombrable qui est catégorique en un cardinal infini non-dénombrable est catégorique en tout cardinal infini non-dénombrable.*