Chapitre 3

Types, saturation, élimination des quanteurs

3.1 Espaces de types

Définition 3.1. 1. Deux n-uples $\bar{a} = (a_1, ..., a_n)$ et $\bar{b} = (b_1, ..., b_n)$ dans des L-structures $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ ont même **type** s'ils satisfont les mêmes formules $\phi(x_1, ..., x_n)$ de L (c.à.d $\mathcal{M}_1 \models \phi(\bar{a})$ ssi $\mathcal{M}_2 \models \phi(\bar{b})$).

2. Si $\bar{a}$ est un uple d'une L-structure $\mathcal{M}$, l'ensemble des formules $\phi(\bar{x})$ satisfaites par $\bar{a}$ s'appelle le **type** de $\bar{a}$ (dans $\mathcal{M}$) et est noté $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ ou simplement $\mathrm{tp}(\bar{a})$ s'il n'y a pas d'ambiguité. Remarquons que le type d'un n-uple correspond à une théorie complète dans le langage $L \cup \{x_1, ..., x_n\}$.
3. On appelle n-**type** (dans le langage L) une théorie complète dans le langage $L \cup \{x_1, ..., x_n\}$.
4. On note S_n l'ensemble des n-types et pour toute théorie T dans le langage L, on note $S_n(T)$ l'ensemble des n-types contenant T, c'est-à-dire l'ensemble des n-types extraits de modèles de T. On note $S(T)$ l'union des $S_n(T)$.

Remarque.
- Si $\bar{a} \in \mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ alors le type de $\bar{a}$ dans $\mathcal{M}$ est le même que le type de $\bar{a}$ dans $\mathcal{N}$.
- Pour tout T, $S_n(T)$ est un espace topologique compact en tant que fermé de S_n.

Exercice 3.2. Soient $\mathcal{M}$ une L-structure et $p \in S(\mathrm{Th}(\mathcal{M}))$. Alors p est réalisé dans une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ et toute partie finies de p est réalisé dans $\mathcal{M}$. (Les n-types de $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ correspondent donc aux ensembles maximaux de formules $\phi(x_1, ..., x_n)$ de L dont toute partie finie est réalisée dans $\mathcal{M}$.)

Exercice 3.3. Soit $p \in S_n(\mathrm{Th}(\mathcal{M}))$. Supposons que p n'a qu'un nombre fini de réalisations dans toutes extensions élémentaires de $\mathcal{M}$. Montrer que p a alors toutes ses réalisations dans $\mathcal{M}$. Indication : montrer qu'il existe une formule dans p qui n'est satisfaite que par un nombre fini m d'éléments. Choisir une telle formule ϕ avec m minimale et montrer que ϕ isole p dans l'espace topologique $S_n(\mathrm{Th}(\mathcal{M}))$.

Définition 3.4. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux L-structures et $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux uples respectivement dans $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. On dit que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ se correspondent par va-et-vient s'il existe un va-et-vient entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ contenant un isomorphisme partiel envoyant $\bar{a}$ sur $\bar{b}$.

Exercice 3.5. Si $\bar{a} \in \mathcal{M}$ et $\bar{b} \in \mathcal{N}$ se correspondent par va-et-vient alors $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type.

Remarque 3.6. Deux uples $\bar{a} \in \mathcal{M}$ et $\bar{b} \in \mathcal{N}$ qui ont même type induisent un unique isomorphisme, de la sous-structure engendré par $\bar{a}$ sur la sous-structure engendrée par $\bar{b}$, qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$. Cet isomorphisme est donc un isomorphisme partiel de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ qui de plus est élémentaire. On verra plus loin que si les structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ satisfont une condition supplémentaire alors deux uples qui ont même type se correspondent par va-et-vient (de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{N}$).

Exemple 3.7. Considérons la théorie de la relation d'équivalence E à une infinité de classes toutes infinies.

- Il y a un unique 1-type.
- Il y a trois 2-types : le type déterminé par $x = y$, celui déterminé par $(x \neq y) \wedge E(x, y)$ et enfin celui déterminé par $\neg E(x, y)$.

On peut remarquer que tout n-type est réalisé dans tout modèle de la théorie.

Exemple 3.8. Soit $L = \{P_i : i \in \omega\}$ où les P_i sont des relations unaires. Considérons à nouveau la théorie dans le langage L qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints et que chaque P_i est infini. Il y a ici une infinité de 1-types : pour chaque i, le type déterminé par $P_i(x)$ et le type déterminé par l'ensemble de formules $\{\neg P_i(x) : i \in \omega\}$. Ce dernier type n'est pas réalisé dans certains modèles de la théorie.

De manière plus générale on considère les types au-dessus d'un ensemble de paramètres. A partir de maintenant pour tout ensemble A, on notera $L(A)$ le langage $L \cup \{a : a \in A\}$.

Définition 3.9. Soit $\mathcal{M}$ une L-structure et $A \subset \mathcal{M}$ un ensemble de paramètres.

1. Soit $\bar{a}$ un uple de $\mathcal{M}$. Le type de $\bar{a}$ sur A (dans $\mathcal{M}$) est l'ensemble $\mathrm{tp}(\bar{a}/A) := \{\phi(\bar{x}) \in L(A) : \mathcal{M} \models \phi(\bar{a})\}$.
2. On appelle n-type sur A un élément de $S_n(\mathrm{Th}(\mathcal{M}, A))$. S'il n'y a pas d'ambiguité on note $S_n(A)$ l'ensemble des n-types sur A et $S(A)$ l'union des $S_n(A)$.
3. Soient $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux uples de $\mathcal{M}$. On dit que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ se correspondent par va-et-vient au-dessus de A s'il existe un va-et-vient de $\mathcal{M}$ vers elle-même contenant un isomorphise partiel qui fixe point par point A et envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$. Remarquons que dans ce cas $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type sur A (voir exo 3.5).

Exemple 3.10. Dans la théorie des ordres denses sans extrémité, un 1-type sur A correspond à la coupure qu'il détermine sur A. En particulier les 1-types sur $\mathbb{Q}$ correspondent aux éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Exemple 3.11. Dans la théorie d'un corps algébriquement clos K un 1-type p sur un sous-corps k est déterminé

- soit par le polynôme minimal sur k d'une réalisation de p (types des éléments algébriques sur k),
- soit par l'ensemble $\{P(x) \neq 0 : P \in k[X]\}$ (type des éléments transcendants sur k).

Proposition 3.12. *Soient $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux uples d'une L-structure $\mathcal{M}$ et $A \subset \mathcal{M}$ un ensemble de paramètres. Alors $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type sur A si et seulement il existe une extension élémentaire $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ et un automorphisme σ de $\mathcal{N}$ qui fixe point par point A et envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$. (Avoir même type signifie donc être dans le même orbite au-dessus de A).*

Démonstration. $(\Leftarrow)$ est évident.

$(\Rightarrow)$: construisons une chaîne d'extensions élémentaires

$$\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_1 \prec .... \prec \mathcal{M}_n \prec ...$$

et une chaîne

$$\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset ... \subset \sigma_n \subset ...$$

d'isomorphismes partiels élémentaires $\sigma_i : \mathcal{M}_i \to \mathcal{M}_i$ telle que $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$, σ_0 est l'unique isomorphisme de la sous-structure engendré par $A \cup \{\bar{a}\}$ sur la sous-structure engendré par $A \cup \{\bar{b}\}$ qui fixe A point par point et envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$ et telle que pour tout $i < \omega$, le domaine de σ_{2i+1} contient $\mathcal{M}_{2i}$ et l'image de σ_{2i+2} contient $\mathcal{M}_{2i+1}$. Pour cela on utilise le lemme suivant :

Lemme 3.13. *Si $\mathcal{M}$ est une L-structure et $\sigma : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ est un isomorphisme partiel élémentaire alors il existe une extension élémentaire $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ et un isomorphisme partiel élémentaire $\tau : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ de domaine $\mathcal{M}$ qui prolonge σ.*

Démonstration. Associons à chaque $m \in \mathcal{M}$ une nouvelle constante m' et montrons que

$$\Sigma := \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) \cup \{\phi(\bar{m}', \sigma(\bar{n})) : \mathcal{M} \models \phi(\bar{m}, \bar{n}) \text{ et } \bar{n} \in \mathrm{dom}(\sigma)\}$$

est consistant. Pour cela considérons en une partie finie

$$\Sigma_0 := \theta(\bar{m}) \cup \{\phi(\bar{m}'_i, \sigma(\bar{n}_i)) : i \in I\}.$$

Alors $\mathcal{M} \models \exists(\bar{x}_i)_{i \in I} \wedge_{i \in I} \phi(\bar{x}_i, \sigma(\bar{n}_i))$ car $\mathcal{M} \models \exists(\bar{x}_i)_{i \in I} \wedge_{i \in I} \phi(\bar{x}_i, \bar{n}_i)$ et σ est élémentaire. On peut donc interprété les m' dans $\mathcal{M}$ tel que $(\mathcal{M}, M, M') \models \Sigma_0$. Par compacité il existe donc un modèle $\mathcal{N}$ de Σ, qui est de plus une extension élémentaire de $\mathcal{M}$. Considérons $\tau : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ la fonction qui à $m \in M$ associe $m' \in N$. Alors τ prolonge σ et est un isomorphisme partiel : pour tout $\bar{m} \in \mathcal{M}$,

$$\mathcal{N} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathcal{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \phi(\tau(\bar{m})).$$

□

Revenons à la construction de nos chaînes : aux étapes paires on prolonge σ_{2i} et aux étapes impaires σ_{2i+1}^{-1}. Les chaînes construites, on vérifie que $\cup_{i\in\omega}\sigma_i$ est un automorphisme de $\cup_{i\in\omega}\mathcal{M}_i$ qui fixe A point par point et envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$. □

Proposition 3.14. *Soit $\mathcal{M}$ une L-structure, $A \subset M$ un ensemble de paramètres et D une partie de M^n définissable dans $\mathcal{M}$. Alors D est définissable à paramètres dans A si et seulement si dans toute extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, D est invariant par tout automorphisme de $\mathcal{N}$ fixant A point par point.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) immédiat.

($\Leftarrow$) Soit $\phi(\bar{x}, \bar{m})$ une formule à paramètres $\bar{m}$ dans M définissant D et soit $p = \mathrm{tp}(\bar{m}/A)$. Vérifions tout d'abord que

$$p(\bar{c}_1) \cup p(\bar{c}_2) \vdash \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}, \bar{c}_1) \leftrightarrow \phi(\bar{x}, \bar{c}_2))$$

dans le langage $L(A) \cup \{\bar{c}_1, \bar{c}_2\}$ où $\bar{c}_1$ et $\bar{c}_2$ sont deux uples de nouvelles constantes. Soit $\mathcal{N}$ une $L(A)$-structure contenant $\bar{n}_1$ et $\bar{n}_2$ réalisant p. En particulier $\mathrm{Th}(\mathcal{N}) = \mathrm{Th}(\mathcal{M}, A)$. On peut donc supposer que la restriction $\mathcal{N}'$ de $\mathcal{N}$ au langage L est une extension élémentaire de $\mathcal{M}$. Alors dans $\mathcal{N}'$, $\mathrm{tp}(\bar{n}_1/A) = \mathrm{tp}(\bar{n}_2/A) = \mathrm{tp}(\bar{m}/A)$. En utilisant 3.12, on en déduit que dans $\mathcal{N}'$, $\{\bar{a} \in N : \mathcal{N}' \models \phi(\bar{a}, \bar{n}_1)\} = D = \{\bar{a} \in N : \mathcal{N}' \models \phi(\bar{a}, \bar{n}_2)\}$ car D est invariant par tout automorphisme fixant A point par point.

Par compacité il existe $\theta(\bar{y}) \in p$ ($\theta \in L(A)$) tel que

$$\vdash \theta(\bar{c}_1) \wedge \theta(\bar{c}_2) \rightarrow \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}, \bar{c}_1) \leftrightarrow \phi(\bar{x}, \bar{c}_2)).$$

On en déduit que D est défini par $\exists \bar{y}(\theta(\bar{y}) \wedge \phi(\bar{x}, \bar{y}))$. □

Définition 3.15. Soit $\mathcal{M}$ une structure, $A \subset M$ un ensemble de paramètres et $\bar{a}$ un uple de M.

1. $\bar{a}$ est **définissable** sur A si l'ensemble $\{\bar{a}\}$ réduit à l'uple $\bar{a}$ est définissable à paramètre dans A.
2. $\bar{a}$ est **algébrique** sur A si $\bar{a}$ est un élement d'un ensemble fini définissable à paramètre dans A.
3. Un type p est **algébrique** s'il a un nombre fini de réalisations dans toutes extensions élémentaires de $\mathcal{M}$.

Proposition 3.16. *1. $\bar{a}$ est définissable sur A si et seulement si $\bar{a}$ est fixé par tout automorphisme fixant A point par point.*

2. $\bar{a}$ est algébrique sur A si et seulement si l'orbite de $\bar{a}$ par l'action des automorphismes fixant A point par point est fini si et seulement si le type de $\bar{a}$ sur A est algébrique.

Démonstration. 1 se déduit immédiatement de la Proposition 3.14.

2 : si le type de $\bar{a}$ sur A est algébrique, cela signifie qu'il existe une formule $\phi \in p$ qui n'est satisfaite que par un nombre fini d'éléments (voir Exercice 3.3). Donc $\bar{a}$ est algébrique sur A car $\bar{a}$ satisfait ϕ.

Si $\bar{a}$ est algébrique sur A, alors l'orbite de $\bar{a}$ est évidemment fini. En utilisant la Proposition 3.12, on en déduit que le type de $\bar{a}$ sur A a un nombre fini de réalisations. □

On note $\mathrm{dcl}(A)$ la clôture définissable de A, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de M définissables sur A et on note $\mathrm{acl}(A)$ la clôture algébrique de A, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de M algébrique sur A.

Exercice 3.17. Montrer les propriétés suivantes de la clôture algébrique. Soient $\mathcal{M}$, $A \subset M$ et $B \subset M$.

1. $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{acl}(A) \supset A$
2. Si $A \subset B$ alors $\mathrm{acl}(A) \subset \mathrm{acl}(B)$.
3. Si $a \in \mathrm{acl}(A)$ alors il existe une partie finie $A_0 \subset A$ telle que $a \in \mathrm{acl}(A_0)$.

Remarquer que la clôture définissable a les mêmes propriétés.

3.2 Saturation

Définition 3.18. Une structure $\mathcal{M}$ est **κ-saturée** si pour toute partie $A \subset M$ telle que $|A| < \kappa$, $\mathcal{M}$ réalise tout type de $S_1(A)$.

Exercice 3.19. Si $\mathcal{M}$ est κ-saturée et $|A| < \kappa$ alors $\mathcal{M}$ réalise tout type de $S(A)$.

Exercice 3.20. Soient $\mathcal{M}$ une structure ω-saturée, $\mathcal{N}$ une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ et $(n_i)_{i\in\omega}$ une famille d'éléments de N alors il existe une famille $(m_i)_{i\in\omega}$ d'éléments de M tel que pour tout $k \in \omega$, $(m_0, ..., m_k)$ et $(n_0, ..., n_k)$ ont même type.

Exemple 3.21.

1. Tout ordre total dense sans extrémité est ω-saturé.
2. Un corps algébriquement clos est ω-saturé si et seulement si il est de degré de transcendance infini.

Proposition 3.22. *Toute structure a une extension élémentaire ω-saturée.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ une structure. On construit une chaîne

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{M} \prec \mathcal{M}_1 \prec ... \prec \mathcal{M}_i \prec ...$$

telle que pour tout i, $\mathcal{M}_{i+1}$ réalise tous les types dans $S_1(\mathcal{M}_i)$. Pour cela considérons une énumération $(p_j)_{j\in J}$ des types dans $S_1(\mathcal{M}_i)$ et l'ensemble d'énoncés

$$\Sigma := \cup_{j\in J} p_j(c_j)$$

où $(c_j)_{j\in J}$ est une famille de nouvelles constantes. Par compacité Σ est consistant car toute partie finie de chaque p_j est réalisée dans $\langle \mathcal{M}_i, M_i \rangle$.

Alors l'union $\mathcal{N} := \cup \mathcal{M}_i$ est une extension élémentaire de $\mathcal{M}$, ω-saturée. En effet si A est une partie finie de $\mathcal{N}$, il existe i tel que $A \subset \mathcal{M}_i$. Soit p un type dans $S_1(A)$. Il a une réalisation a dans un extension élémentaire de $\mathcal{M}_i$. Alors le type de a sur $\mathcal{M}_i$ est réalisé dans $\mathcal{M}_{i+1}$, donc p est réalisé dans $\mathcal{N}$. □

Lemme 3.23. *Soient $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ deux structures ω-saturées et $\bar{a} \in \mathcal{M}$, $\bar{b} \in \mathcal{N}$ deux uples. Alors $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type si et seulement si ils se correspondent par un va-et-vient de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{N}$.*

Démonstration. ($\Leftarrow$) déjà vu.

($\Rightarrow$) Pour tous uples $\bar{c} \in M$, $\bar{d} \in N$ tels que $\mathrm{tp}(\bar{c}) = \mathrm{tp}(\bar{d})$ il existe un unique isomorphisme partiel $\sigma_{\bar{c},\bar{d}}$ (qui est élémentaire) de la sous-structure engendrée par $\bar{c}$ vers la sous-structure engendrée par $\bar{d}$ qui envoie $\bar{c}$ sur $\bar{d}$. Alors l'ensemble de ces isomorphismes partiels forme un va-et-vient. En effet si $\bar{c} \in M$, $\bar{d} \in N$ tels que $\mathrm{tp}(\bar{c}) = \mathrm{tp}(\bar{d})$ et si $c \in M$ alors $p = \{\phi(x, \bar{d}) : \mathcal{M} \models \phi(c, \bar{c})\}$ est un type sur $\bar{d}$ réalisé par un d dans $\mathcal{N}$ car $\mathcal{N}$ est ω-saturée. Alors $\sigma_{c\bar{c},d\bar{d}}$ prolonge $\sigma_{\bar{c},\bar{d}}$. □

Exercice 3.24. Une théorie est complète si et seulement si tous ses modèles ω-saturés se correspondent par va-et-vient.

Exercice 3.25. Soit T la théorie de la relation d'équivalence à une infinité de classes.

1. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles de T élémentairement équivalents. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ ont ou bien tous deux le même nombre fini de classes à n éléments, ou bien tous deux une infinité de classes à n éléments.
2. Soit $\mathcal{M}$ un modèle ω-saturé de T. Montrer que si $\mathcal{M}$ a des classes finies arbitrairement grandes alors $\mathcal{M}$ a une infinité de classes infinies.
3. Déterminer l'ensemble des théories complètes contenant T. (Remarquer qu'il y en a 2^ω.)
4. Déterminer celles qui sont ω-catégoriques.
5. Déterminer celles qui sont κ-catégoriques pour un (tout) cardinal $\kappa > \omega$.

Exercice 3.26. On dit qu'une théorie complète T est **menue** si $S(T)$ est dénombrable. Remarquer que si $\mathcal{M}$ est structure dénombrable ω-saturée alors $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ est menue. Montrer que toute théorie complète, dénombrable et menue a un modèle ω-saturé dénombrable. (Pour cela, on remarquera que le nombre de types sur une partie finie est dénombrable et que le nombre de parties finies d'un ensemble dénombrable est dénombrable.)

Exercice 3.27. Un modèle $\mathcal{M}$ qui est ω-saturé et dénombrable est **fortement homogène** : si $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont deux uples de $\mathcal{M}$ qui ont même type alors il existe un automorphisme de $\mathcal{M}$ qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$.

3.3 Elimination des quanteurs

Très souvent pour montrer qu'une théorie est complète on utilise la méthode de va-et-vient entre deux modèles ω-saturées. Pour cela on fait une hypothèse sur ce que doivent être les types : on considère un ensemble Φ de formules de L et on montre que deux uples qui satisfont les mêmes formules de Φ se correspondent par va-et-vient. On montre alors en fait plus :

Théorème 3.28. *Soit T une théorie et Φ un ensemble non vide de formules $\phi(\bar{x})$ de L où $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$ tels que deux n-uples extraits de modèles de T ont même types dès qu'ils satisfont les mêmes formules de Φ. Alors pour toute formule $\psi(\bar{x})$ de L il existe une combinaison booléenne $\phi(\bar{x})$ d'éléments de Φ telle que $T \vdash \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$. (La réciproque est évidente.)*

Démonstration. L'hypothèse signifie que pour tout type $p \in S_n(T)$, on a dans $S_n(T)$

$$\bigcap_{\phi \in \Phi} \langle \epsilon_p \phi \rangle = \{p\}$$

où $\epsilon_p \phi = \phi$ pour $\phi \in p$ et $\epsilon_p \phi = \neg\phi$ pour $\phi \notin p$. (Ici $\langle \epsilon_p \phi \rangle$ désigne l'ouvert de $S_n(T)$.)

Soit $\psi(\bar{x})$ une formule de L. Par compacité, pour tout $p \in \langle \psi \rangle$, il existe une partie finie $\Phi_{\psi,p}$ de Φ telle que $\cap_{\phi \in \Phi_{\psi,p}} \langle \epsilon_p \phi \rangle \subset \langle \psi \rangle$. Donc pour tout $p \in \langle \psi \rangle$,

$$\{p\} \subset \langle \phi_{\psi,p} \rangle \subset \langle \psi \rangle$$

où $\phi_{\psi,p} = \wedge_{\phi \in \Phi_{\psi,p}} \epsilon_p \phi$. Donc $\langle \psi \rangle = \cup_{p \in \langle \psi \rangle} \langle \phi_{\psi,p} \rangle$. Par compacité, on en extrait un sous-recouvrement fini. Il existe donc $p_1, ..., p_k \in \langle \psi \rangle$ tel que

$$T \vdash \forall \bar{x}(\psi(\bar{x}) \leftrightarrow (\vee_{i \in \{1,...,n\}} \phi_{\psi,p_i}(\bar{x}))).$$

□

Définition 3.29. Une théorie T **élimine les quanteurs** si les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :

- Pour tout $n > 0$ et toute formule $\psi(\bar{x})$ où $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$ il existe une formule $\phi(\bar{x})$ sans quanteur telle que $T \vdash \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.
- Pour tout $n > 0$, les types de $S_n(T)$ sont déterminé par les formules atomiques.

Exemple 3.30. Soit K un corps. On exprime la théorie T des K-espaces vectoriels infinis dans le langage $L_K := \{0, +, -, \lambda_k : k \in K\}$ où pour tout $k \in K$, λ_k est une fonction unaire qui est interprété dans un K-espace vectoriel par la multiplication par k. Alors T est complète et élimine les quanteurs : soient V_1 et V_2 deux espaces vectoriels de dimension infini et considérons $\mathcal{F}$ la famille des isomorphismes partiels ayant pour domaine un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors $\mathcal{F}$ est non vide et on vérifie facilement que $\mathcal{F}$ est un va-et-vient entre V_1 et V_2. Donc T est complète. De plus T élimine les quanteurs car si $\bar{a} \in V_1$ et $\bar{b} \in V_2$ satisfont les mêmes équations linéaires alors les sous-espaces vectoriels engendrés par $\bar{a}$ et respectivement par $\bar{b}$ sont isomorphes.

Remarque. La théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion non triviaux "correspond" à la théorie des Q-e.v. infinis : on définit dans un groupe divisible sans torsion $\lambda_{p/q}$ par $px = qy$ qui est une formule sans quanteur. On en déduit que cette théorie élimine elle aussi les quanteurs.

Exercice 3.31. La théorie des ordres totaux denses sans extrémité élimine les quanteurs.

Exercice 3.32. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles d'une théorie T qui élimine les quanteurs. Si $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ alors $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$. Une théorie qui vérifie cette propriété est dite **modèle-complète**.

Proposition 3.33. *La théorie des corps algébriquement clos élimine les quanteurs.*

Démonstration. Soient K_1 et K_2 deux corps algébriquement clos et $\bar{a} \in K_1$ et $\bar{b} \in K_2$ deux uples satisfaisant les mêmes formules atomiques. Dans ce cas K_1 et K_2 ont même caractéristique car pour tout p, $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p} = 0$ est une formule atomique. De plus $\bar{a}$ et $\bar{b}$ satisfont les mêmes équations polynomiales sur le corps premier, donc ils engendrent deux sous-corps k_1 et k_2 isomorphes. On peut supposé que K_1 et K_2 sont de degré de transcendance infini (ou ω-saturé). On a vu (voir exemple 1.9) qu'il existe alors un va-et-vient de K_1 sur K_2 contenant l'isomorphisme de k_1 sur k_2 qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$. Donc $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type. □

Lemme 3.34. *Soit S un système fini d'équations et d'inéquations (en plusieurs inconnues), à coefficients dans un corps k. Si S a une solution dans une extension K de k, il a une solution dans toute extension algébriquement close de k.*

Démonstration. On peut voir S comme une formule sans quanteur $\phi(x_1, ..., x_n, b_1, ..., b_m)$ dans le langage des anneaux où les x_i correspondent aux inconnues et les b_i sont les coefficients dans le corps k. Alors il existe $\bar{a} \in K$ tel que $K \models \phi(\bar{a}, \bar{b})$. Considérons une extension K_1 de K algébriquement close. Comme ϕ est sans quanteur, $K_1 \models \phi(\bar{a}, \bar{b})$. Soit une autre extension K_2 de k algébriquement close. Alors les clôtures algébriques $\bar{k}_1$ de k dans K_1 et $\bar{k}_2$ de k dans K_2 sont isomorphes au-dessus de k. Comme la théorie des corps algébriquement clos élimine les quanteurs, $\bar{k}_1 \prec K_1$ et $\bar{k}_2 \prec K_2$ et donc comme $K_1 \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{b})$ on a $\bar{k}_1 \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{b})$, $\bar{k}_2 \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{b})$ et $K_2 \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{b})$. □

Théorème 3.35 (Théorème des zéros de Hilbert). *Soit K un corps algébriquement clos, I un idéal de $K[X_1, ..., X_n]$ et $P \in K[X_1, ..., X_n]$. Supposons que pour tout $\bar{a} \in K^n$, si $Q(\bar{a}) = 0$ pour tout $Q \in I$ alors $P(\bar{a}) = 0$. Alors il existe m tel que $P^m \in I$.*

Démonstration. Supposons que pour tout m, $P^m \notin I$ et soit J l'idéal maximal contenant I mais aucun des P^m. On vérifie facilement que J est premier. Soit L le corps de fractions de $K[X_1, ..., X_n]/J$. Alors L contient K. Soit $Q_1, ..., Q_r$ des générateurs de J. Alors la système $S := \{Q_1 = 0, ..., Q_r = 0, P \neq 0\}$ a une solution dans L et donc d'après le lemme précédent une solution dans K, mais cette solution contredit l'hypothèse. □

Exercice 3.36. Vérifier, en utilisant l'élimination des quantificateurs, que :

1. Dans un ordre total dense sans extrémité $\mathrm{acl}(A) = A$ pour tout A.
2. Dans un espace vectoriel la clôture algébrique de A est égale au sous-espace vectoriel engendré par A.
3. Dans un corps algébriquement clos la clôture algébrique correspond à la notion classique dans le sens d'un corps.