Chapitre 4

Théories totalement transcendantes

Dans ce chapitre les théories seront par hypothèse complètes.

4.1 Stabilité et propriété de l'ordre

Remarquons qu'une théorie T a au plus $2^{\max\{|A|,|T|\}}$ types au-dessus d'un ensemble de paramètres A (i.e. A est une partie d'un modèle de T). Certaines théories n'ont pas plus de types au-dessus de A que $\max\{|A|, |T|\}$:

Définition 4.1. Une théorie (complète) T est dite **κ-stable** pour un cardinal κ infini si pour tout modèle $\mathcal{M}$ de T et tout ensemble de paramètres $A \subset M$, $|A| \leq \kappa$ implique $|S_1(A)| \leq \kappa$. Une théorie (complète) T est dite **stable** si elle est κ-stable pour un κ, **instable** sinon. Une structure est dite **κ-stable (stable)** si sa théorie l'est.

Exercice 4.2. Une théorie T est κ-stable si et seulement si pour tout ensemble de paramètres A, $|A| \leq \kappa$ implique $|S(A)| \leq \kappa$.

Remarque. Une théorie T dénombrable et ω-stable est menue (c'est-à-dire $S(T)$ est dénombrable).

Exemple 4.3.
- La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique fixée est κ-stable pour tout cardinal infini.
- La théorie des K-espaces vectoriels infinis est κ-stable pour tout cardinal infini $\kappa \geq |K|$.

Exercice 4.4. Soit $\mathcal{M} = \langle M, E_i : i \in \omega \rangle$ tel que chaque E_i est une relation d'équivalence sur M, E_0 est la relation d'équivalence triviale réduite à une seule classe et pour chaque $i \in \omega$, $E_{i+1} \subset E_i$ et toute classe définie par E_i est exactement l'union de deux classes définies par E_{i+1}. Montrer que $\mathcal{M}$ est stable mais n'est pas ω-stable.

Énonçons des résultats de théorie des modèles pour illustrer la stabilité :

Fait 4.5. – *Un groupe abélien est stable. Il est ω-stable si et seulement si il est somme directe d'un groupe divisible avec un groupe d'exposant borné.*
- *Une théorie dénombrable κ-catégorique en un cardinal infini non dénombrable est ω-stable. (Ce résultat correspond à une étape de la preuve du théorème de Morley.)*
- *Un corps infini ω-stable est algébriquement clos.*

Par contre les ordres totaux infinis sont instables :

Définition 4.6. Soit T une théorie. Une formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ a la **propriété de l'ordre** dans T s'il existe deux suites $(\bar{a}_i)_{i\in\omega}$ et $(\bar{b}_i)_{i\in\omega}$ dans un modèle $\mathcal{M}$ de T telles que

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}_i, \bar{b}_j) \text{ si et seulement si } i < j.$$

La théorie T a la **propriété de l'ordre** s'il existe une formule qui a la propriété de l'ordre dans T.

Exercice 4.7. Une théorie T a la propriété de l'ordre si et seulement s'il existe une formule $\psi(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ où $\bar{z}_1$ et $\bar{z}_2$ sont des uples de même longueur n et un modèle $\mathcal{M}$ telle que ψ ordonne totalement un ensemble infini de M^n.

Proposition 4.8. *Une théorie qui a la propriété de l'ordre est instable.*

Démonstration. Soit T une théorie qui a la propriété de l'ordre. Vérifions que T n'est pas ω-stable. Soit $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ une formule qui a la propriété de l'ordre. Soient $(\bar{c}_i)_{i\in\mathbb{R}}$ et $(\bar{d}_j)_{j\in\mathbb{Q}}$ des nouvelles constantes. Alors par compacité,

$$T \cup \{\phi(\bar{c}_i, \bar{d}_j) : i < j\} \cup \{\neg\phi(\bar{c}_i, \bar{d}_j) : i \geq j\}$$

est consistant. Il existe donc un modèle $\mathcal{M}$ de T contenant deux familles $(\bar{a}_i)_{i\in\mathbb{R}}$ et $(\bar{b}_j)_{j\in\mathbb{Q}}$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}_i, \bar{b}_j)$ si et seulement si $i < j$. Posons $B := \{\bar{b}_j : j \in \mathbb{Q}\}$ alors pour tout $i \neq i'$, $\mathrm{tp}(\bar{a}_i/B) \neq \mathrm{tp}(\bar{a}_{i'}/B)$ donc $|S(B)| \geq 2^\omega$.

Pour vérifier que T n'est pas κ-stable pour un cardinal infini κ quelconque, on considère un ordre total I contenant une partie dense J tel que $|J| \leq \kappa < |I|$ (il faut montrer l'existence d'un tel ordre) et on remplace $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ respectivement par I et J. $\square$

Remarque 4.9. La réciproque est vraie : la propriété de l'ordre caractérise les théories instables.

4.2 Rang de Morley

Différentes notions de rangs ou dimensions sont définies en stabilité. Pour les théories ω-stables on peut définir le rang de Morley qui généralise la dimension de Zariski sur les ensembles constructibles dans un corps algébriquement clos.

Définition 4.10. Soit $\mathcal{M}$ une L-structure et D une partie de M^n définissable dans $\mathcal{M}$. On définit $\mathrm{RM}(D) \geq \alpha$ pour un ordinal α par l'induction suivante :

- $\mathrm{RM}(D) \geq 0$ si $D \neq \emptyset$,
- $\mathrm{RM}(D) \geq \alpha + 1$ pour un ordinal α s'il existe une extension élémentaire $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ et une famille infinie $(D_i)_{i \in \omega}$ de parties disjointes de N^n définissables dans $\mathcal{N}$ telle que pour tout $i \in \omega$, $D_i \subset D$ (dans $\mathcal{N}$) et $\mathrm{RM}(D_i) \geq \alpha$.
- $\mathrm{RM}(D) \geq \alpha$ pour α un ordinal limite si $\mathrm{RM}(D) \geq \beta$ pour tout ordinal $\beta < \alpha$.

On dit que $D \neq \emptyset$ est rangé (par le rang de Morley) si pour un ordinal α, $\mathrm{RM}(D) \geq \alpha$ est vrai mais $\mathrm{RM}(D) \geq \alpha + 1$ est faux. Dans ce cas on pose $\mathrm{RM}(D) = \alpha$ et dans le cas contraire $\mathrm{RM}(D) = \infty$. Par convention on pose $\mathrm{RM}(\emptyset) = -1$.

Remarque.

- Le rang de Morley est stable par isomorphisme.
- Le rang de Morley est stable par extension élémentaire : que l'on regarde D dans $\mathcal{M}$ ou dans n'importe quelle extension élémentaire de $\mathcal{M}$ le rang de Morley reste inchangé. (On utilise ici le théorème de l'extension élémentaire commune.)

Exercice 4.11. Soient D_1 et D_2 deux parties non vides de M^n définissables dans $\mathcal{M}$.

- Si $D_1 \subset D_2$ alors $\mathrm{RM}(D_1) \leq \mathrm{RM}(D_2)$.
- $\mathrm{RM}(D_1 \cup D_2) = \max\{\mathrm{RM}(D_1), \mathrm{RM}(D_2)\}$
- $\mathrm{RM}(D_1) = 0$ si et seulement si D_1 est finie et non vide.

Exemple 4.12. Soit $\mathcal{M} = \langle M, E \rangle$ où E est une relation d'équivalence sur M composée uniquement de classes finies et pour chaque entier $n > 0$ d'une et une seule classe à n éléments. Chacune de ses classes finies sont de rang 0, mais M est de rang 2. En effet il existe une extension élémentaire où il y a une infinité de classes infinies (une telle extension est une extension ω-saturée), donc $\mathrm{RM}(M) \geq 2$. Il reste à montrer que $\mathrm{RM}(M) \leq 2$ (exercice).

Exercice 4.13. 1. Pour chaque entier $n > 0$, donner un exemple de structure $\mathcal{M}$ de rang de Morley n ($\mathrm{RM}(M) = n$).

2. Donner un exemple de structure de rang de Morley ω.

Définition 4.14. Soient $\mathcal{M}$ une L-structure et $\phi(\bar{x}, \bar{m})$ une formule à paramètres $\bar{m} \in M$. On définit alors la rang de Morley de $\phi(\bar{x}, \bar{m})$ dans $\mathcal{M}$, noté $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{m}))$, comme le rang de Morley de l'ensemble défini par $\phi(\bar{x}, \bar{m})$ dans $\mathcal{M}$.

Exercice 4.15. Traduire la définition du rang de Morley en termes de formules.

Proposition 4.16. *Soient $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ deux L-structures, $\bar{m}_1$ et $\bar{m}_2$ deux k-uples respectivement dans M_1 et M_2 ayant même type, et $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ une formule de L où $\bar{y} = (y_1, ..., y_k)$. Alors* $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{m}_1)) = \mathrm{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{m}_2))$.

Démonstration. Par le théorème de l'extension élémentaire commune et du fait que le rang est stable par isomorphisme et extension élémentaire, on peut supposer que $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}$. Alors il existe un automorphisme d'une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ qui envoie $\bar{m}_1$ sur $\bar{m}_2$. On en déduit que $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{m}_1)) = \mathrm{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{m}_2))$. $\square$

Corollaire 4.17. *Supposons le langage L fixé. Il existe un ordinal α tel que pour tout ensemble définissable D dans une L-structure, si* $\mathrm{RM}(D) \geq \alpha$ *alors* $\mathrm{RM}(D) = \infty$.

Démonstration. Il n'y a pas plus de rangs de Morley possibles que de types d'uples sur le vide (au plus $2^{\max\{\omega,|L|\}}$). Les rangs possibles forment donc un ensemble. □

Proposition 4.18. *Si T est une théorie ω-stable alors tout ensemble définissable dans un modèle de T est rangé par le rang de Morley.*

Démonstration. Supposons que D est un ensemble définissable de rang infini. Alors par ce qui précède il existe (dans une extension élémentaire) une partition de D en deux ensembles définissables D_0 et D_1 de rangs infinis. Par induction, on montre qu'il existe une famille d'ensembles définissables de rangs tous infinis (D_s) indéxée par les suites finies de $\{0,1\}$ telle que pour tout s, $D_s = D_{s\frown 0} \dot{\cup} D_{s\frown 1}$. Soit A un ensemble de paramètres dénombrables telle chaque D_s peut être définie par une formule à paramètres dans A. Alors il y a au moins 2^ω types sur A. □

Lemme 4.19. *Soit M une L-structure ω-saturée et D une partie de M^n définissable dans $\mathcal{M}$. Alors le rang de Morley de D est déterminé en utilisant uniquement les ensembles définissables sur M : si* $\mathrm{RM}(D) \geq \alpha + 1$ *pour un ordinal α alors il existe une famille infinie $(D_i)_{i\in\omega}$ de parties de D définissables* **dans** *$\mathcal{M}$, deux à deux disjointes et de rangs supérieurs ou égals à α.*

Démonstration. Supposons que $\mathrm{RM}(D) \geq \alpha + 1$. Alors il existe $\mathcal{N}$ une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ et une famille infinie $(D'_i)_{i\in\omega}$ de parties de D définissables dans $\mathcal{N}$, deux à deux disjointes et de rangs supérieurs à α. Soient $\bar{a} \in M$ et $\bar{a}'_i \in N$ des paramètres permettant de définir D et les D'_i. Par ω-saturation, il existe des $\bar{a}_i \in M$ tels que la suite des $\bar{a}_i$ a même type sur $\bar{a}$ que la suite des $\bar{a}'_i$ (voir exo 3.20). Ces paramètres $\bar{a}_i$ permettent alors de définir une famille (D_i) satisfaisant la consclusion. □

Proposition 4.20. *Soit D une partie M^n définissables dans $\mathcal{M}$ tel que* $\mathrm{RM}(D) = \alpha < \infty$ *alors il existe $d < \omega$ tel que dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$ il y a au plus d parties de D deux à deux disjointes et de rang égal à α.*

Démonstration. Supposons qu'il n'existe pas de tel d. Plaçons nous dans une extension élémentaire $\mathcal{N}$ ω-saturée. Alors pour tout $d > 0$ il existe dans $\mathcal{N}$ une partition $D_1^d, ..., D_d^d$ de D où les D_i^d sont des ensembles définissables dans $\mathcal{N}$ de rang α. Pour tout $j \in \{1, ..., d+1\}$, il existe $i \in \{1, ..., d\}$ tel que $\mathrm{RM}(D_i^d \cap D_j^{d+1}) = \alpha$ car $\mathrm{RM}(D_j^{d+1}) = \max\{\mathrm{RM}(D_1^d \cap D_j^{d+1}), ..., \mathrm{RM}(D_d^d \cap D_j^{d+1})\}$. Par récurrence sur d, on peut donc supposer que pour tout $j \in \{1, ..., d+1\}$, D_j^{d+1} est inclus dans un D_i^d. Cette suite de partitions se voit alors comme un arbre infini à branchement fini (les points étant l'ensemble des D_i^d et les arêtes les (D_i^d, D_j^{d+1}) pour D_i^d contenant strictement D_j^{d+1}). Par le lemme de König (tout arbre infini à branchements finis a une branche infinie), on en déduit qu'il existe une suite décroissante infinie $(D_i)_{i\in\omega}$ de parties de D telle que $\mathrm{RM}(D_i \setminus D_{i+1}) = \alpha$ pour chaque $i \in \omega$. Alors $\mathrm{RM}(D) \geq \alpha + 1$. □

Définition 4.21. Soit D un ensemble définissable dans une structure $\mathcal{M}$. Le degré de Morley, dénoté $\mathrm{dM}(D)$, est l'élément $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ maximal tel que l'on peut diviser D en d parties de même rang dans une extension élémentaire de $\mathcal{M}$. Si $\phi(\bar{x}, \bar{m})$ est une formule de $L(M)$ alors on définit le degré de Morley de ϕ dans $\mathcal{M}$ noté $\mathrm{dM}(\phi(\bar{x}, \bar{m}_1))$ comme la degré de Morley de l'ensemble défini par $\phi(\bar{x}, \bar{m})$ dans $\mathcal{M}$.

Remarque 4.22. Soit M une L-structure ω-saturée et D une partie de M^n définissable dans $\mathcal{M}$ de rang α et de degré d. Alors il existe une partition de D par d parties définissable dans $\mathcal{M}$ de rang α (et de degré 1).

Définition 4.23. Soit A un ensemble de paramètres dans une structure $\mathcal{M}$.

1. Si $p \in S(A)$, on pose $\mathrm{RM}(p) = \min\{\mathrm{RM}(\phi) : \phi \in p\}$ et $\mathrm{dM}(p) = \min\{\mathrm{dM}(\phi) : \phi \in p \text{ et } \mathrm{RM}(\phi) = p\}$.
2. Pour $\bar{a}$ un uple de $\mathcal{M}$, on pose $\mathrm{RM}(\bar{a}/A) = \mathrm{RM}(\mathrm{tp}(\bar{a}/A))$ et $\mathrm{dM}(\bar{a}, A) = \mathrm{dM}(\mathrm{tp}(\bar{a}/A))$.

Remarque. Soient $A \subset B \subset \mathcal{M}$ et $p \in S(A)$. Si q est une extension de p dans $S(B)$ ($q \in S(B)$ et $q \supset p$) alors $\mathrm{RM}(q) \leq \mathrm{RM}(p)$.

Notation. On note $D \subset_\alpha E$ pour deux parties de M^n définissable dans une structure $\mathcal{M}$ si $\mathrm{RM}(D \setminus E) < \alpha$.

Lemme 4.24. *Soient $p \in S_n(A)$ et $\phi \in p$ tel que $\mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(\phi) = \alpha < \infty$ et $\mathrm{dM}(p) = \mathrm{dM}(\phi)$ alors*

$$p = \{\psi \in L(A) : \phi \subset_\alpha \psi\}$$

et p est isolé des types de rang suprérieur ou égal à α dans $S_n(A)$ par ϕ.

Démonstration. Soit $\psi \in p$. Alors $\phi \wedge \psi$ est de rang α. D'où $\mathrm{dM}(p) \leq \mathrm{dM}(\phi \wedge \psi) \leq \mathrm{dM}(\phi) \leq \mathrm{dM}(p)$. Il y a donc égalité et le rang de $\phi \wedge \neg\psi$ est nécessairement plus petit que α. Réciproquement, si $\phi \subset_\alpha \psi$ alors $\phi \wedge \neg\psi \notin p$ car $\mathrm{RM}(\phi \wedge \neg\psi) < \alpha$ et donc $\psi \in p$.

Soit $q \in \langle\phi\rangle \subset S_n(A)$ tel que $q \neq p$. Alors il existe $\psi \in p$ tel que $\psi \notin q$. Mais alors $\mathrm{RM}(q) < \alpha$ car $\mathrm{RM}(\phi \wedge \neq \psi) < \alpha$ et $\phi \wedge \neq \psi \in q$. □

Proposition 4.25. *Soit A un ensemble de paramètres dans une structure $\mathcal{M}$ et $\phi(\bar{x}) \in L(A)$ tel que $\mathcal{M} \models \exists\bar{x}\phi(\bar{x})$. Alors*

$$\mathrm{RM}(\phi) = \max\{\mathrm{RM}(p) : p \in S(A),\ \phi \in p\},$$

$$\mathrm{dM}(\phi) = \sum\{\mathrm{dM}(p) : p \in S(A),\ \phi \in p,\ \mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(\phi)\}.$$

Démonstration. Exercice. (Indication : si $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x})) = \alpha < \infty$, considérer l'ensemble des formules $\{\psi(\bar{x}) \in L(A) : \phi \subset_\alpha \psi\}$.) □

Définition 4.26. Une théorie (complète) est dite **totalement transcendante** si tous ses 1-types sont rangés par le rang de Morley. Une structure est dite **totalement transcendante** si sa théorie l'est.

Le théorème suivant montre que les notions de ω-stabilité et de totale transcendance se confondent dans le cas d'un langage dénombrable.

Théorème 4.27. *Soit T une théorie.*

1. *Si T est totalement transcendante alors T est κ-stable pour tout cardinal $\kappa \geq |T|$.*
2. *Si T est dénombrable alors T est totalement transcendante si et seulement si T est ω-stable. En particulier une théorie ω-stable dénombrable est κ-stable pour tout cardinal κ infini.*
3. *Si T est totalement transcendante alors tout ensemble définissable est rangé par le rang de Morley.*

Démonstration. Le 2 se déduit du 1 en utilisant 4.18.

Montrons 1. Supposons T totalement transcendante. Soit A un ensemble de paramètres dans $\mathcal{M} \models T$. Alors pour tout type p dans $S_1(A)$ il existe une formule $\phi_p \in p$ de même rang et même degré. Par 4.24 si $p \neq q$, $\phi_p \neq \phi_q$, donc $|S_1(A)| \leq \max\{|A|, |T|\}$.

Montrons 3. Si T est dénombrable alors T est ω-stable (1) et on conclut par 4.18. Sans cette hypothèse, on considère un ensemble définissable D non rangé dans un modèle ω-saturé $\mathcal{M}$ de T ($D \subset M^n$). Comme dans la preuve de 4.18, on obtient alors un arbre d'ensembles définissables qu'on peut de plus supposer définis par des formules à paramètres dans $\mathcal{M}$. Cet arbre étant dénombrable, il existe une partie dénombrable L_0 de L permettant de le définir. Soit $\mathcal{M}_0$ la restriction de la structure $\mathcal{M}$ au langage L_0. Alors $\mathcal{M}_0$ n'est pas ω-stable et la théorie de $\mathcal{M}_0$, qui est dénombrable, n'est pas totalement transcendante. Donc $\mathrm{RM}(M) = \infty$ dans $\mathcal{M}_0$. Il existe donc un arbre de parties de M définissables dans $\mathcal{M}_0$ car $\mathcal{M}_0$ est ω-saturée. (Exercice : vérifier que $\mathcal{M}$ ω-saturée implique que $\mathcal{M}_0$ l'est également.) Cet arbre est donc définissable dans $\mathcal{M}$ et $\mathrm{RM}(M) = \infty$ dans $\mathcal{M}$. □

Il est parfois plus simple d'utiliser la description des 1-types d'une structure pour déterminer son rang. Dans ce cas on utilise la caractérisation suivante.

Lemme 4.28. *Soient $\mathcal{M}$ une structure, $A \subset M$ et $p \in S(A)$. Alors $\mathrm{RM}(p) \geq \alpha + 1$ si et seulement si p a une extension $q \in S(B)$ ($A \subset B \subset \mathcal{N} \succ \mathcal{M}$) qui est point d'accumulation de types dans $S(B)$ de rang supérieur ou égal à α.*

Démonstration. Un type de rang α est isolé des types de rang supérieur ou égal à α. Il ne peut donc pas être point d'accumulation de tels types. Par conséquent, si p a une extension q qui est point d'accumulation de tels types, alors q est de rang strictement supérieur α et donc p également.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{RM}(p) \geq \alpha + 1$. Soit $\mathcal{N}$ une extension élémentaire ω-saturée de $\mathcal{M}$. Soit

$$\Sigma = \{\psi(\bar{x}) \in L(N) : \text{ il existe } \phi \in p; \mathrm{RM}(\phi \wedge (\neg\psi)) < \mathrm{RM}(p)\}.$$

On montre facilement par compacité que Σ est consistant. Soit q un type sur N contenant Σ, alors q contient p et a même rang que celui-ci. (Remarquons que l'on montre ici qu'un type a toujours une extension de même rang.) Soit $\theta \in q$. Alors θ est de rang supérieur à $\alpha+1$. Comme $\mathcal{N}$ est ω-saturée, cette formule se découpe en plusieurs formules de rang supérieur à α et contient donc un type de rang supérieur à α distinct de q. Le type q est donc point d'accumulation de types dans $S(N)$ de rang supérieur ou égal à α. $\square$

Remarque. Si $\mathcal{M}$ est ω-saturée et $p \in S(M)$ alors $\mathrm{RM}(p) \geq \alpha+1$ si et seulement si p est point d'accumulation de types de $S(M)$ de rang supérieur ou égal à α. Dans ce cas le rang de Morley sur $S_n(M)$ correspond au rang de Cantor-Bendixon sur l'espace topologique $S_n(M)$.

Lemme 4.29. *Soient $\mathcal{M}$ une structure, $A \subset M$, $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux uples de $\mathcal{M}$.*

1. $\mathrm{RM}(\bar{a}/A) \leq \mathrm{RM}(\bar{a}\bar{b}/A)$.
2. *Si* $\bar{b} \in \mathrm{acl}(A \cup \{\bar{a}\})$ *alors* $\mathrm{RM}(\bar{a}/A) = \mathrm{RM}(\bar{a}\bar{b}/A)$.

Démonstration. 1. Exercice.

2. Montrons par induction sur α que pour tout $\bar{a}$, $\bar{b}$, A, si $\bar{b} \in \mathrm{acl}(A \cup \{\bar{a}\})$ alors $\mathrm{RM}(\bar{a}\bar{b}/A) \geq \alpha$ implique $\mathrm{RM}(\bar{a}/A) \geq \alpha$. C'est évident pour $\alpha = 0$. Supposons le résultat vrai pour α et considérons $\bar{b} \in \mathrm{acl}(A \cup \{\bar{a}\})$ tel que $\mathrm{RM}(\bar{a}\bar{b}/A) \geq \alpha+1$. Il existe une extension $q \in S(B)$ du type de $\bar{a}\bar{b}$ sur A qui est point d'accumulation de types de rang supérieur ou égal à α. Soit $\bar{a}'\bar{b}'$ une réalisation de q. Alors $\bar{b}' \in \mathrm{acl}(A \cup \{\bar{a}'\}) \subset \mathrm{acl}(B \cup \{\bar{a}'\})$.

Nous allons montrer que le type de $\bar{a}'$ sur B est également point d'accumulation de types de rang supérieur ou égal à α.

Considérons pour cela une formule $\phi(\bar{x}, \bar{y}) \in L(B)$ telle que $\phi(\bar{a}', \bar{y})$ isole le type de $\bar{b}'$ sur $B \cup \{\bar{a}'\}$. La formule $\phi(\bar{a}', \bar{y})$ est algébrique. Il y a donc au plus n uples $\bar{y}$ satisfaisant $\phi(\bar{a}', \bar{y})$ pour un entier n. Soit

$$\theta(\bar{x}, \bar{y}) = \phi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \exists^{\leq n} \bar{z} \phi(\bar{x}, \bar{z}).$$

Soit $\psi(\bar{x}) \in \mathrm{tp}(\bar{a}'/B)$. Alors il existe $\bar{a}_1\bar{b}_1$ tel que $\models \psi(\bar{a}_1) \wedge \theta(\bar{a}_1, \bar{b}_1)$, $\mathrm{tp}(\bar{a}_1\bar{b}_1/B) \neq \mathrm{tp}(\bar{a}'\bar{b}'/B)$ et $\mathrm{RM}(\bar{a}_1\bar{b}_1/B) \geq \alpha$. Par hypothèse d'induction $\mathrm{RM}(\bar{a}_1/B) \geq \alpha$ car $\bar{b}_1 \in \mathrm{acl}(B\bar{a}_1)$. De plus $\mathrm{tp}(\bar{a}_1/B) \neq \mathrm{tp}(\bar{a}'/B)$ car $\mathrm{tp}(\bar{a}_1\bar{b}_1/B) \neq \mathrm{tp}(\bar{a}'\bar{b}'/B)$ et $\phi(\bar{a}', \bar{y})$ isole le type de $\bar{b}'$ sur $B \cup \{\bar{a}'\}$. $\square$

4.3 Types définissables

Lemme 4.30. *Soient $\mathcal{M}$ une structure ω-saturée totalement transcendante et $\mathcal{N}$ une extension élémentaire de $\mathcal{M}$. Si D est une partie non vide de N^n définissable dans $\mathcal{N}$ qui est contenu dans un ensemble définissable sur $\mathcal{M}$ de même rang, alors $D \cap M^n$ est non vide.*

Démonstration. Soit E l'ensemble définissable sur $\mathcal{M}$ contenant D et de même rang. Nous montrons le résultat par induction sur le rang α et degré d de E.

Si $\alpha = 0$ alors E est fini et donc contenu dans M^n.

Si $d > 1$. Par la remarque 4.22, on peut décomposer E en d parties définissables $E_1, ..., E_d$ sur $\mathcal{M}$ de degré 1 et de rang α. Alors au moins pour un i, $D \cap E_i$ est de rang α et on applique l'hypothèse d'induction sur $D \cap E_i \subset E_i$.

Si $\alpha > 0$ et $d = 1$ alors $E \setminus D$ est de rang $\beta < \alpha$. En utilisant le lemme 4.19, E contient une infinité de parties disjointes E_i définissables dans $\mathcal{M}$ telles que $\beta \leq \mathrm{RM}(E_i) < \alpha$. Il existe i tel que $\mathrm{RM}((E \setminus D) \cap E_i) < \beta$. Alors $D \cap E_i$ est de même rang que E_i et on applique l'hypothèse d'induction avec $D \cap E_i \subset E_i$. □

Proposition 4.31. *Soient $\mathcal{M}$ une structure totalement transcendante et D une partie définissable de M^n à paramètre dans A de rang de Morley α. Alors pour toute formule $\phi(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_k)$,*

$$\{\bar{b} \in M^k : D \subset_\alpha \phi(\bar{x}, \bar{b})\}$$

est définissable à paramètres dans A.

Démonstration. On peut supposer $\mathcal{M}$ ω-saturée (en passant à une extension élémentaire) et D de degré de Morley 1.

Montrons tout d'abord qu'il existe une partie finie X de $D \cap M^n$ telle que pour toute extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ et tout $\bar{b} \in N^k$,

$$X \subset \phi(M^n, \bar{b}) \text{ implique } D \subset_\alpha \phi(\bar{x}, \bar{b}). \quad (1)$$

Construisons pour cela par induction une suite $(\mathcal{N}_i, \bar{a}_i, \bar{b}_i)$ telle que pour tout i, j, $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}_i \prec \mathcal{N}_{i+1}$, $D \not\subset_\alpha \phi(\bar{x}, \bar{b}_i)$, $\bar{a}_i \in \phi(M^n, \bar{b}_j)$ si et seulement si $i \leq j$. Supposons $\mathcal{N}_0, \bar{a}_0, \bar{b}_0, ..., \mathcal{N}_{i-1}, \bar{a}_{i-1}, \bar{b}_{i-1}$ construits. Comme D est de degré de Morley 1, $D \not\subset_\alpha \phi(\bar{x}, \bar{b}_0) \cup ... \cup \phi(\bar{x}, \bar{b}_{i-1})$. Soit $E := D \setminus \phi(\bar{x}, \bar{b}_0) \cup ... \cup \phi(\bar{x}, \bar{b}_{i-1})$. Alors E est un ensemble définissable dans $\mathcal{N}_{i-1}$ contenu dans D et de même rang. Par le lemme 4.30, $E \cap M^n \neq \emptyset$. Soit donc $\bar{a}_i \in M^n$, tel que $\bar{a}_i \in D \setminus \phi(M^n, \bar{b}_0) \cup ... \cup \phi(M^n, \bar{b}_{i-1})$. Si $\{\bar{a}_0, ..., \bar{a}_i\}$ vérifie (1) on arrête, sinon il existe $\bar{b}_i$ dans une extension élémentaire $\mathcal{N}_i$ de $\mathcal{N}_{i-1}$, tel que $\{\bar{a}_0, ..., \bar{a}_i\} \subset \phi(M^n, \bar{b}_i)$ mais $D \not\subset_\alpha \phi(\bar{x}, \bar{b}_i)$. La construction s'arrête nécessairement, sinon la formule ϕ aurait la propriété de l'ordre dans l'extension élémentaire $\cup \mathcal{N}_i$.

Remarquons que pour chaque $\bar{c}$ dans une extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, tel que $D \subset_\alpha \phi(\bar{x}, \bar{c})$, on peut choisir $X_{\bar{c}}$ inclu dans $\phi(M^n, \bar{c})$ satisfaisant (1). Soit I **l'ensemble** des parties finies $X_{\bar{c}}$ (c'est un ensemble de parties de M) et notons pour tout $X \in I$, $\psi_X(\bar{y})$ la formule $X \subset \phi(M^n, \bar{y})$. Alors on vérifie facilement que $D \subset_\alpha \phi(\bar{x}, \bar{y})$ est définie par la disjonction infinie $\vee_{X \in I} \psi_X(\bar{y})$. De même $D \subset_\alpha \neg\phi(\bar{x}, \bar{y})$ est définie par une disjonction infinie $\vee_{X \in I'} \psi'_X(\bar{y})$. Comme D est de degré 1, pour toute $\bar{b}$ dans une extension élémentaire de $\mathcal{M}$, ou bien $D \subset_\alpha \phi(\bar{x}, \bar{b})$ ou bien $D \subset_\alpha \neg\phi(\bar{x}, \bar{b})$. Donc l'ensemble des énoncés $\{\neg\psi_X(\bar{y}) : X \in I\} \cup \{\neg\psi'_X(\bar{y}) : X \in I'\}$ est inconsistant. Par compacité, il existe donc une partie finie I_0 de I tel que la disjonction infinie $\vee_{X \in I} \psi_X(\bar{y})$ est équivalente à la disjonction finie $\vee_{X \in I_0} \psi_X(\bar{y})$. Par conséquent $\{\bar{b} \in M^k : D \subset_\alpha \phi(\bar{x}, \bar{b})\}$ est définissable par la formule $\vee_{X \in I_0} \psi_X(\bar{y})$. Cet ensemble est de plus définissable à paramètres dans A car invariant par automorphismes fixant A point par point (voir proposition 3.14). □

Théorème 4.32. *Soient $\mathcal{M}$ une structure totalement transcendante et $A \subset M$. Alors tout type $p(\bar{x})$ de $S(A)$ est* **définissable** *sur A : c'est-à-dire, pour toute formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ sans paramètres, il existe une formule $d_p\phi(\bar{y})$ à paramètres dans A tel que pour tout $\bar{a} \in A$, $\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in p$ si et seulement si $\mathcal{M} \models d_p\phi(\bar{a})$.*

Démonstration. Soit $\phi_p \in p$ de même rang α et même degré que p. Alors par le lemme 4.24, pour toute formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ et tout $\bar{a} \in A$, $\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in p$ si et seulement si $\phi_p \subset_\alpha \phi(\bar{x}, \bar{a})$ ce qui est définissable sur A d'après la proposition précédente. $\square$

4.4 Déviation, indépendance

Définition 4.33. Soient $A \subset B$ deux ensembles de paramètres dans une structure totalement transcendante. Soient $p \in S_n(A)$ et $q \in S_n(B)$ une extension de p. Si $\mathrm{RM}(q) < \mathrm{RM}(p)$ on dit que q est une **extension déviante** de p et que q **dévie sur** A. Si $\mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(q)$ on dit que q est une **extension non déviante** de p et que q **ne dévie pas sur** A.

Proposition 4.34. *Soient $\mathcal{M}$ une structure totalement transcendante et $A \subset B \subset \mathcal{M}$ et $p \in S_n(A)$.*

- *Il existe au moins une extension non déviante de p dans $S_n(B)$.*
- *Il y a au plus $\mathrm{dM}(p)$ extensions non déviantes de p dans $S_n(B)$.*
- *Si $\mathcal{M}$ est ω-saturée il y a exactement $\mathrm{dM}(p)$ extensions non déviantes de p dans $S_n(M)$ qui sont chacune de degré 1.*

Démonstration. Exercice. (Indication : utiliser une formule ϕ_p isolant p des types de rang supérieur ou égal au rang de p.) $\square$

Proposition 4.35. *Soient $\mathcal{M}$ totalement transcendante et p un type dans $S(M)$. Alors p est* **stationnaire** *: c.à.d. $\mathrm{dM}(p) = 1$ ou encore pour toute extension élémentaire $\mathcal{N}$ de M et tout $M \subset B \subset N$, p a une unique extension non déviante q dans $S_n(B)$. De plus $q := \{\phi(\bar{x}, \bar{b}) : \bar{b} \in B,\ \mathcal{N} \models d_p\phi(\bar{b})\}$. On dit que q est* **l'héritier** *de p sur B.*

Démonstration. Notons $\alpha = \mathrm{RM}(p)$. Soit $\phi_p \in p$ de même rang et même degré que p. Montrons que ϕ_p est de degré 1. Soit $\mathcal{N}$ une extension élémentaire ω-saturée de $\mathcal{M}$. Pour montrer que ϕ_p est de degré 1 il suffit de montrer que ϕ_p ne peut se découper dans $\mathcal{N}$ en deux parties disjointes de rang α : c'est-à-dire de vérifier que pour tout $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ et tout $\bar{n} \in N$, on a $\phi_p(\bar{x}) \subset_\alpha \phi(\bar{x}, \bar{n})$ ou $\phi_p(\bar{x}) \subset_\alpha \neg\phi(\bar{x}, \bar{n})$. La formule $d_p\phi(\bar{y})$ définit l'ensemble $\{\bar{n} \in N : \phi_p(\bar{x}) \subset_\alpha \phi(\bar{x}, \bar{n})\}$ (*). On a $\mathcal{M} \models \forall \bar{y}(d_p\phi(\bar{y}) \iff \neg\, d_p\neg\phi(\bar{y}))$: en effet pour tout $\bar{m} \in M$, $\mathcal{M} \models d_p\phi(\bar{m})$ ssi $\phi(\bar{x}, \bar{m}) \in p$ ssi $\neg\phi(\bar{x}, \bar{m}) \notin p$ ssi $\mathcal{M} \models \neg\, d_p\neg\phi(\bar{m})$. (Remarque : ce résultat n'est pas vrai en général ; on utilise ici que p est un type sur un modèle). D'où $\mathcal{N} \models \forall \bar{y}(d_p\phi(\bar{y}) \iff \neg\, d_p\neg\phi(\bar{y}))$ et en utilisant (*) on conclut que ϕ_p est de degré 1.

Soient $M \subset B \subset N$ et q l'unique extension non déviante de p. Alors q est de même rang que ϕ_p et aussi de degré 1. Par conséquent (lemme 4.24), $q := \{\phi(\bar{x}, \bar{b}) : \phi_p \subset_\alpha \phi(\bar{x}, \bar{b})\}$ et on conclut par (*). $\square$

Définition 4.36. Soient $\mathcal{M}$ une structure totalement transcendante, $\bar{a} \in \mathcal{M}$, $A \subset M$ et $B \subset M$. On dit que $\bar{a}$ est indépendant de B au-dessus de A (dénoté $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A B$) si $\operatorname{tp}(\bar{a}/B \cup A)$ ne dévie pas sur A.

Théorème 4.37. *Soient $\mathcal{N}$ une structure totalement transcendante, $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{N}$ et A, B, C des ensembles de paramètres dans N. L'indépendance vérifie les propriétés suivantes :*

1. **Monotonie :** *si $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A B$ et $C \subset B$ alors $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A C$.*
2. **Transitivité :** *$\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A B \cup C$ si et seulement si $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A B$ et $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{A \cup B} C$.*
3. **Symétrie :** *Si $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A \bar{b}$ alors $\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A \bar{a}$.*
4. **Caractère fini :** *$\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A B$ si et seulement si $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A \bar{b}_0$ pour tout $\bar{b}_0 \subset B$.*
5. **Caractère local :** *Il existe $B_0 \subset B$ fini tel que $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{B_0} B$.*

Démonstration. 1 : $\mathrm{RM}(\bar{a}/A) = \mathrm{RM}(\bar{a}/B \cup A) \leq \mathrm{RM}(\bar{a}/C \cup A) \leq \mathrm{RM}(\bar{a}/A)$.

2 : $\mathrm{RM}(\bar{a}/B \cup C \cup A) \leq \mathrm{RM}(\bar{a}/B \cup A) \leq \mathrm{RM}(\bar{a}/A)$. Donc $\mathrm{RM}(\bar{a}/B \cup C \cup A) = \mathrm{RM}(\bar{a}/A)$ si et seulement si $\mathrm{RM}(\bar{a}/B \cup A) = \mathrm{RM}(\bar{a}/A)$ et $\mathrm{RM}(\bar{a}/B \cup C \cup A) = \mathrm{RM}(\bar{a}/B \cup A)$.

3 : Montrons tout d'abord la symétrie si $A = M$ où $\mathcal{M}$ est une sous-structure élémentaire ω-saturée de $\mathcal{N}$. Soit $\alpha = \mathrm{RM}(\bar{a}/M)$ et $\beta = \mathrm{RM}(\bar{b}/M)$. Soient $\phi(\bar{x}) \in \operatorname{tp}(\bar{a}/M)$ et $\psi(\bar{y}) \in \operatorname{tp}(\bar{b}/M)$ de rangs α et β respectivement et de degré 1. Supposons que $\bar{b} \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_M \bar{a}$. Alors il existe $\theta(\bar{x}, \bar{y}) \in L(M)$ tel que $\mathcal{N} \models \theta(\bar{a}, \bar{b})$ et $\mathrm{RM}(\theta(\bar{a}, \bar{y})) < \beta$. On peut supposer que $\theta(\bar{x}, \bar{y})$ implique $\phi(\bar{x}) \wedge \psi(\bar{y})$. Par la proposition 4.31, l'ensemble

$$\{\bar{n} \in N : \mathrm{RM}(\theta(\bar{n}, \bar{y})) < \beta\} = \{\bar{n} \in N : \psi(\bar{y}) \not\subset_\beta \theta(\bar{n}, \bar{y})\}$$

est définissable par une formule $\phi'(\bar{x}) \in L(M)$. Remarquons que $\phi'(\bar{x}) \in \operatorname{tp}(\bar{a}/M)$. On peut donc remplacer $\theta(\bar{x}, \bar{y})$ par $\theta'(\bar{x}, \bar{y}) = \theta(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \phi'(\bar{x})$. Alors pour tout $\bar{n} \in N$ tel que $\mathcal{N} \models \theta'(\bar{n}, \bar{b})$, $\mathrm{RM}(\theta'(\bar{n}, \bar{y})) < \beta$. Par conséquent $\theta'(\bar{x}, \bar{b})$ n'est pas satisfaite dans $\mathcal{M}$ et comme $\mathcal{M}$ est ω-saturée, le lemme 4.30 implique que $\mathrm{RM}(\theta'(\bar{x}, \bar{b})) < \mathrm{RM}(\phi(\bar{x}))$. D'où $\bar{a} \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_M \bar{b}$.

Dans le cas général, considérons une structure $\mathcal{M}$ ω-saturée contenant A et élémentairement équivalente à $\mathcal{N}$ au-dessus de A. On peut alors, par l'existence d'extension non déviante et l'existence d'extension élémentaire commune, supposer que $\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A M$, $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{A \cup \bar{b}} M$ et $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$. Supposons $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A \bar{b}$. Par transitivité $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A M\bar{b}$ et donc $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_M \bar{b}$. D'où $\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_M \bar{a}$ et encore par transitivité $\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A \bar{a}$.

4 : $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A B$ ssi pour tout $\bar{b}_0 \in B$ et tout $\phi(\bar{x}, \bar{y}) \in L(A)$ si $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}, \bar{b}_0)$ alors $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{b}_0)) \geq \mathrm{RM}(\bar{a}/A)$ ssi pour tout $\bar{b}_0 \in B$, $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A \bar{b}_0$.

5 : il existe $\bar{b}_0 \in B$ et $\phi(\bar{x}, \bar{y}) \in L$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}, \bar{b}_0)$ et $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{b}_0)) = \mathrm{RM}(\bar{a}, B)$. $\square$

Définition 4.38. Soient $\mathcal{M}$ une structure totalement transcendante et $A, B, C \subset M$. On dit que A est indépendant de B au-dessus de C, noté $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_C B$, si pour tout uple $\bar{a} \in A$, $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_C B$.

Exercice 4.39. Vérifier que la généralisation de l'indépendance ci-dessus est cohérente avec la première définition et qu'elle est toujours monotone, transitive et symétrique.

Exercice 4.40. Soient $\mathcal{M}$ une structure totalement transcendante et $A, B \subset M$. Alors $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_B \operatorname{acl}(B)$.

4.5 Groupes définissables

Définition 4.41. Soit $\mathcal{M}$ une structure.

1. Un groupe définissable sur $\mathcal{M}$ est la donnée d'une partie définissable D de M^n et de deux fonctions définissables $\mu : M^{2n} \to M^n$ et $\iota : M^n \to M^n$ telles que les restrictions de μ et ι munissent D d'une structure de groupe G (la multiplication de G est définie par μ et le passage à l'inverse par ι.)
2. Un groupe infiniment définissable sur $\mathcal{M}$ est la donnée d'une famille $(D_i)_{i\in I}$ de parties définissables de M^n et de deux fonctions définissables $\mu : M^{2n} \to M^n$ et $\iota : M^n \to M^n$ tel que dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$, les restrictions de μ et ι munissent $\bigcap_{i\in I} D_i$ d'une structure de groupe G.

Remarque. 1. Dans le cas d'un groupe définissable, les restrictions de μ et ι munissent D d'une structure de groupe dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$.
2. Dans le cas d'une famille $(D_i)_{i\in I}$, si $\mathcal{M}$ est $|I|^+$-saturée, on peut donc se passer de "dans toute extension élémentaire" dans la définition précédente.

Théorème 4.42. *Un groupe infiniment définissable sur une structure totalement transcendante est définissable.*

Démonstration. Soient $\mathcal{M}$ totalement transcendante et G un groupe infiniment définissable sur $\mathcal{M}$ par une famille $(D_i)_{i\in I}$ et les fonctions μ et ι. Pour simplifier les notations supposons que $n = 1$. Notons 1 l'élément neutre et $x \cdot y = \mu(x, y)$, $x^{-1} = \iota(x)$ pour tous x, y.

On peut supposer que la famille $(D_i)_{i\in I}$ est close par intersection finie. Dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$, si $x, y, z \in \cap_{i\in I} D_i$ alors

1. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
2. $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$
3. $(x^{-1})^{-1} = x$
4. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

Par compacité, il existe $i_0 \in I$ tel que dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$, si $x, y, z \in D_{i_0}$ alors x, y, z vérifie 1, 2, 3 et 4. On peut supposer de plus que D_{i_0} est de rang de Morley minimum et de degré minimum pour ce rang.

Soient α ce rang et $\phi(x) \in L(M)$ définissant D_{i_0}. Dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$, si a satisfait ϕ et est de rang maximal α sur M, alors $a \in G$ car pour tout $i \in I$, D et $D \cap D_i$ ont même rang α et même degré de Morley.

Montrons que dans toute extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, le groupe G est égal à l'ensemble

$$D := \{b \in \mathcal{N} : \mathcal{N} \models \phi(b) \text{ et } \phi(x) \subset_\alpha \phi(x \cdot b)\}$$

qui est définissable sur M par la proposition 4.31.

Soit $b \in D$. Soit g (dans une extension élémentaire de $\mathcal{N}$), satisfaisant ϕ, de rang α sur M (donc $g \in G$), et indépendant de b au-dessus de M. Alors g est de rang α sur Mb et satisfait également $\phi(x \cdot b)$. De plus $\mathrm{RM}(g \cdot b/M) \geq \mathrm{RM}(g \cdot b/Mb) = \mathrm{RM}(g/Mb) = \alpha$. Donc $g \cdot b$ satisfait ϕ et est de rang maximal α. Donc $g \cdot b \in G$. Par conséquent $b = g^{-1} \cdot (g \cdot b) \in G$. (Ici $b = g^{-1} \cdot (g \cdot b)$ car $g, g^{-1}, b \in D_{i_0}$).

Soit $b \in G$. Vérifions alors que $\phi(x) \subset_\alpha \phi(x \cdot b)$. Soit g satisfaisant ϕ et de rang α sur Mb. Alors $g \in G$ et donc $g \cdot b$ satisfait ϕ. Par conséquent $b \in D$. $\square$