Corrigé rapide du devoir 2

Exercice 1. Supposons que T soit une théorie dont les modèles sont exactement les corps finis. Alors par compacité, T a un modèle infini car elle a pour tout nombre premier p, un modèle de cardinilaté p qui est $\mathbb{F}_p$.

Exercice 2. Soient I un ensemble infini et U un ultrafiltre.

(a) Soit $A = \cap_{X \in U} X$.

Ou bien $A \neq \emptyset$. Soit $a \in A$. Alors $U \subseteq \{X \subseteq I : a \in X\}$. Par maximalité de U, on a égalité (et en fait $A = \{a\}$.

Ou bien $A = \emptyset$. Dans ce cas, pour tout $a \in I$, il existe $X \in U$ tel que $X \subset I \setminus \{a\}$ et donc $I \setminus \{a\} \in U$. Par intersection finie, U contient donc toutes parties cofinies (tout complémentaire d'une partie finie).

(b) Soit F l'ensemble des parties cofinies de I. On vérifie facilement que F est un filtre. Par le lemme de Zorn, il existe un ultrafiltre qui contient F.

Exercice 3. Soit $\mathcal{M}$ une L-structure et U un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$. Notons $\mathcal{M}^U$ l'ultraproduit $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}/U$.

(a) Considerer l'application σ de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}^U$ qui à $m \in M$ associe $[m]$ (la classe de la suite constante éagle à m). On vérifie alors avec le Critère de Łos que σ est un plongement élémentaire.

(b) Si U est principal, il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $U = \{X \subset I : i_0 \in X\}$. Alors pour tout $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $[m_i]_{i \in \mathbb{N}} = [m_{i_0}] = \sigma(m_{i_0})$. Donc $\mathcal{M}^U$ est isomorphe à $\mathcal{M}$.

(c) Comme U contient toute partie cofinie de $\mathbb{N}$, on $a = [1/i+1]_{i \in \mathbb{N}} < [1/n]$ et $A = [i]_{i \in \mathbb{N}} > [n]$ pour tout entier n.

Exercice 4. Tout fermé de $\mathcal{T}$ est une intersection de fermés de la forme $\langle \phi \rangle$ où ϕ est un énoncé. La compacité de $\mathcal{T}$, est donc équivalente à pour tout ensemble d'énoncés Σ, si $\cap_{\phi \in \Sigma} \langle \phi \rangle$ est vide alors il existe une partie finie Σ_0 de Σ telle que $\cap_{\phi \in \Sigma} \langle \phi \rangle$ est vide. Or $\cap_{\phi \in \Sigma} \langle \phi \rangle$ est vide si et seulement si il n'y a pas de théorie complète contenant Σ si et seulement Σ n'a pas de modèle. Donc $\mathcal{T}$ est compacte si et seulement si pour tout ensemble d'énoncés Σ, si Σ n'a pas de modèle alors une partie finie de Σ n'a pas de modèle, ce qui est la contraposée de l'énoncé du théorème de compacité.

Exercice 5. Les deux théories sont ω-catégoriques mais pour tout cardinal $\kappa > \omega$, elles ont plusieurs modèles : considérer le modèle où toutes les classes sont de cardinal κ et un modèle où l'une des classes est dénombrale, l'autre ou les autres de cardinal κ.

Exercice 6.

1. Soit κ un cardinal infini. Alors T a des modèles de cardinalité κ qui n'ont aucun point en dehors des P_i et d'autres qui ont des points en-dehors de P_i.
2. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T. Considérer dans langage $L(M) \cup \{c_j : j \in \omega\}$,

$$\Sigma := \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) \cup \{\neg P_i(c_j) : i, j \in \omega\} \cup \{c_j \neq c_{j'} : j \neq j'\}$$

est consistant par compacité. Donc $\mathcal{M}$ a une extension élémentaire $\mathcal{N}$ qui contient une infinité de points qui ne sont dans aucun des prédicats P_i.

3. Soient $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ deux modèles de T. Par la question précédente, il existe $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ extensions élémentaires de $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ respectivement, contenant chacune une infinité de points qui ne sont dans aucun des prédicats P_i. On vérifie alors facilement qu'il existe un va-et-vient entre $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$. (Considérer l'ensemble des isomorphismes partiels de domaine fini.) D'où $\mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{N}_1 \equiv \mathcal{N}_2 \equiv \mathcal{M}_2$. La théorie T est donc complète.

Exercice 7. Soit T la théorie de $\langle \mathbb{Z}, S \rangle$ où S est la fonction successeur ($S(n) = n + 1$, pour tout entier n.)

1. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T. La relation "il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $x = S^m(y)$" est une relation d'équivalence sur M (non définissable dans $\mathcal{M}$). Chaque classe d'équivalence est une sous-structure de $\mathcal{M}$ isomorphe à $\langle \mathbb{Z}, S \rangle$. Soit κ le nombre de classes d'équivalence. Alors on vérifie facilement que $\mathcal{M}$ est isomorphe à l'union de κ copies de $\langle \mathbb{Z}, S \rangle$.
2. Soit κ infini non dénombrable. Un modèle de T de cardinal κ a κ classes d'équivalence définies comme ci-dessus (car chaque classe est dénombrable). Un tel modèle est par conséquent isomorphe à l'union de κ copies de $\langle \mathbb{Z}, S \rangle$, qui est donc l'unique modèle de cardinalté κ à ismorphismes près.
3. Par 1, tout modèle dénombrable est isomorphe à une union d'un nombre fini ou dénombrable de copies de $\langle \mathbb{Z}, S \rangle$. La théorie T a donc ω modèles dénombrables à isomorphismes près.
4. Soient $\mathcal{M}$ un modèle de T non dénombrable et $\bar{a} = (a_1, ..., a_n)$, $\bar{b} = (b_1, ..., b_n)$ deux n-uples dans M tels que pour tout i, j et tout entier k , on ait $S^k(a_i) = a_j$ si et seulement si $S^k(b_i) = b_j$. Considérons l'ensemble $\mathcal{F}$ des isomorphismes partiels σ à domaine fini tel que pour tout $x, y \in \mathrm{dom}\sigma$ et tout entier k, on ait $S^k(x) = y$ si et seulement si $S^k(\sigma(x)) = \sigma(y)$. Alors l'isomorphisme partiel qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$ est dans $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ est un va-et-vient. Soit $\sigma \in \mathcal{F}$ et $x \in M$. S'il existe $y \in \mathrm{dom}\sigma$ et $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = S^k(y)$ alors on prolonge σ en envoyant x sur $S^k(\sigma(y))$. Sinon, comme $\mathcal{M}$ n'est pas dénombrable, on peut envoyer x sur un élément de M qui n'est en relation d'équivalence avec aucun élément de $\mathrm{Im}\sigma$.
5. D'après la question précédente un n-type $p(x_1, ..., x_n)$ est déterminé par l'ensemble fini des formules de la forme $S^k(x_i) = x_j$ qu'il contient.