Correction rapide du devoir 3

Exercice 1. Le point le moins évident est de montrer que $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A)) \subset \mathrm{acl}(A)$. Soit $a \in \mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A))$. Alors il existe une formule $\phi(x, \bar{b})$ algébrique (c.à.d. définissant un ensemble fini), satisfaite par a et à paramètres $\bar{b} \in \mathrm{acl}(A)$. Il existe donc un entier n tel que $\mathcal{M} \models \exists^{\leq n} x \phi(x, \bar{b})$. Comme $\bar{b}$ est algébrique sur A, il existe $\psi(\bar{y}) \in L(A)$ algébrique satisfaite par $\bar{b}$. Alors la formule de $L(A)$,

$$\theta(x) = \exists \bar{y}(\psi(\bar{y}) \wedge (\exists^{\leq n} x \phi(x, \bar{y})) \wedge \phi(x, \bar{y}))$$

est satisfaite par a et est algébrique. Donc $a \in \mathrm{acl}(A)$.

Exercice 2. On définit par récurrence sur k la famille $(m_i)_{i \in \omega}$. Supposons que l'on a $(m_0, ..., m_{k-1})$ dans $\mathcal{M}$ tel que $(m_0, ..., m_{k-1})$ et $(n_0, ..., n_{k-1})$ ont même type. Alors il existe un automorphisme σ d'une extension élémentaire de $\mathcal{N}$ qui envoie $(n_0, ..., n_{k-1})$ sur $(m_0, ..., m_{k-1})$. Par ω-saturation le type de $\sigma(n_k)$ sur $(m_0, ..., m_{k-1})$ est réalisé dans $\mathcal{M}$. Soit m_k une de ses réalisations dans $\mathcal{M}$. Alors $(m_0, ..., m_{k-1}, m_k)$ et $(n_0, ..., n_{k-1}, n_k)$ ont même type.

Exercice 3. Soit n un entier. Pour $\phi(\bar{x})$ une formule, on note $\exists^{\geq n} \bar{x} \phi(\bar{x})$ la formule

$$\exists \bar{x}_1 ... \bar{x}_n((\wedge_{i \neq j} \bar{x}_i \neq \bar{x}_j) \wedge (\wedge_i \phi(\bar{x}_i)))$$

et $\exists^{=n} \bar{x} \phi(\bar{x})$ la formule

$$\exists^{\geq n} \bar{x} \phi(\bar{x}) \wedge \neg \exists^{\geq n+1} \bar{x} \phi(\bar{x}).$$

1. On peut exprimer par l'énoncé suivant le fait d'avoir exactement k classes à n éléments :
$$\exists^{=k} x(\exists^{=n} y E(y, x)).$$
2. Si $\mathcal{M}$ a des classes finies arbitrairement grandes alors pour tout n, $\mathcal{M} \models \exists^{\geq n} x(\exists^{\geq n} y E(y, x))$. Par compacité il existe donc une extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ contenant une infinité de classes infinies. Soient $(n_{i,j})_{(i,j) \in \omega^2}$ une famille d'éléments distincts de $\mathcal{N}$ telle que $\mathcal{N} \models E(n_{i,j}, n_{i',j'})$ ssi $i = i'$. En utilisant l'exercice 2, par ω-saturation il existe une telle famille dans $\mathcal{M}$.
3. Soit $\mathcal{M}$ un modèle ω-saturé de T. Il y a deux cas :

   1er cas : $\mathcal{M}$ a des classes finies arbitrairement grandes. Alors $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ est axiomatisée par l'ensemble des axiomes qui pour chaque entier n détermine le nombre de classes à n éléments (fini ou infini). En effet si $\mathcal{N}$ est un autre modèle ω-saturé de T ayant pour chaque entier n le même nombre de classes à n éléments alors d'après la question qui précède $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ ont toutes deux une infinité de classes infinies et il est facile de montrer qu'elles se correspondent par va-et-vient. Les théories complètes correspondant à ce premier cas sont en bijection avec les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel qu'il n'existe pas d'entier n à partir duquel f est nul. Il y a en particulier 2^ω théories complètes dans ce premier cas.

   2ème cas : Il existe m tel que toute les classes finies ont au plus m éléments. Dans ce cas on peut exprimer combien il y a de classes infinies (c'est-à-dire à strictement plus de m éléments). La théorie $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ est alors axiomatisée par l'ensemble des axiomes qui pour chaque entier n détermine le nombre de classes à n éléments (fini ou infini) et qui détermine le nombre de classes infinies. Les théories complètes correspondant à ce second cas sont en bijection avec les fonctions $g : \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel qu'il existe m vérifiant $g(n) = 0$ pour tout entier $n > m$ et tel que $\sum_{i \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}} g(i) = \infty$. Dans ce second cas il n'y a que ω théories complètes.

4. Une théorie du premier cas n'est pas ω-catégorique : elle a ω modèles dénombrables à isomorphisme près : un modèle dénombrable à j classes infinies pour chaque $j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Une théorie du second cas est ω-catégorique : le nombre de classes pour chaque $i \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ étant déterminé.
5. Les seuls théories κ-catégoriques (pour $\kappa > \omega$) sont celles du second cas qui vérifient ou bien $g(\infty) = 0$ et $g(n)$ est fini pour tout entier n sauf un, ou bien $g(\infty) = 1$ et $g(n)$ est fini pour tout entier n.

Exercice 4. (a) Si $\mathcal{M}$ est ω-saturée et dénombrable, alors tout type sur vide est réalisé dans $\mathcal{M}$, il y en a donc au plus un nombre dénombrable, donc $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ est menue.

(b) Supposons T menue. Soit $\mathcal{M}_0$ un modèle dénombrable de T. Soit A une partie finie de $\mathcal{M}_0$ et k le cardinal de A. Alors le nombre de 1-types sur A est dénombrable car inférieur ou égal au nombre de $(k+1)-$types sur $\emptyset$. Comme il n'y a qu'un nombre dénombrable de parties finies de $\mathcal{M}_0$, il n'y a donc qu'un nombre dénombrable de 1-types sur parties finies de $\mathcal{M}_0$. Par compacité (voir preuve de la prop 3.22.), il existe une extension élémentaire $\mathcal{M}_1$ réalisant tous les 1-types sur parties finies de $\mathcal{M}_0$. Par Lowenheim-Skolem descendant, on peut supposé $\mathcal{M}_1$ également dénombrable. En itérant cette construction (comme dans la preuve de la prop 3.22.), on obtient un modèle ω-saturé dénombrable.