Devoir 4
à retourner le 7 décembre

Exercice 1. Soit $\mathcal{M} = \langle M, E_i : i \in \omega \rangle$ tel que chaque E_i est une relation d'équivalence sur M, E_0 est la relation d'équivalence triviale réduite à une seule classe et pour chaque $i \in \omega$, $E_{i+1} \subset E_i$ et toute classe définie par E_i est exactement l'union de deux classes définies par E_{i+1}. Montrer que $\mathcal{M}$ est stable mais n'est pas ω-stable.

Exercice 2. Soient D_1 et D_2 deux parties non vides de M^n définissables dans une structure $\mathcal{M}$. Montrer que $\mathrm{RM}(D_1 \cup D_2) = \max\{\mathrm{RM}(D_1), \mathrm{RM}(D_2)\}$

Exercice 3 (Proposition 4.25). Soit A un ensemble de paramètres dans une structure $\mathcal{M}$ et $\phi(\bar{x}) \in L(A)$ tel que $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x})$. Montrer que :

$$\mathrm{RM}(\phi) = \max\{\mathrm{RM}(p) : p \in S(A),\ \phi \in p\},$$

$$\mathrm{dM}(\phi) = \sum\{\mathrm{dM}(p) : p \in S(A),\ \phi \in p,\ \mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(\phi)\}.$$

Exercice 4. Soit le langage $L = \{P_i, E_i : i \in \omega\}$ où chaque P_i est un symbole de relation unaire et chaque E_i un symbole de relation binaire.

Soit $\mathcal{C}$ la classe des L-structures $\mathcal{M}$ vérifiant :

- pour tout $i \neq j$, $P_i^{\mathcal{M}} \cap P_j^{\mathcal{M}} = \emptyset$,
- pour tout $i \in \omega$, $E_i^{\mathcal{M}} \subseteq P_i^{\mathcal{M}} \times P_i^{\mathcal{M}}$ et $E_i^{\mathcal{M}}$ défini sur $P_i^{\mathcal{M}}$ une relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies.

(a) Montrer que $\mathcal{C}$ correspond à la classe des modèles d'une théorie T. (On explicitera pour cela une axiomatisation de T sous forme d'une liste d'énoncés dans le langage L.)

(b) Soit $\mathcal{M}$ un modèle ω-saturé de T.
Montrer que l'ensemble $\{x \in M : \mathcal{M} \models \neg P_i(x) \text{ pour tout } i \in \omega\}$ est infini. (Indication : montrer tout d'abord qu'il existe une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ dans laquelle cet ensemble est infini.)

(c) Montrer que T est complète et élimine les quanteurs. (Indcation : utiliser les modèles ω-saturés.)

(d) Soient $\mathcal{M} \models T$ et $A \subseteq M$.

-i- Décrire les 1-types sur A.

-ii- Montrer que pour tout $i \in \omega$, $\mathrm{RM}(P_i) \geq 2$.
($\mathrm{RM}(P_i)$ désigne le rang de Morley de l'ensemble défini par P_i dans $\mathcal{M}$.)

-iii- Montrer que pour tout $i \in \omega$, il y a un unique type de $S_1(A)$ contenant P_i et de rang strictement supérieur à 1.

-iv- En déduire le rang de Morley et le degré de Morley de chaque P_i.

-v- Déterminer le rang de Morley et le degré de Morley de $\mathcal{M}$.