Université Lyon I
Master Recherche
Théorie des modèles
Épreuve d'examen
Mardi 11 janvier 2005, 14h - 17h

Les notes du cours sont autorisées. Le sujet comporte trois exercices indépendants sur deux pages recto-verso.

Exercice 1. Soit le langage $L = \{R\}$ où R est une relation binaire. On appelle graphe une L-structure satisfaisant les deux axiomes suivants :

- $\forall x \, \neg R(x,x)$ (Antireflexivité),
- $\forall x \forall y \; R(x,y) \leftrightarrow R(y,x)$ (Symétrie).

(a) Soit G un graphe fini.

Montrer qu'il existe un graphe fini H contenant G ayant la propriété suivante : pour toute partie X de G, il existe $h \in H$ tel que

$$X = \{g \in G : H \models R(g,h)\}.$$

(b) Considérons l'ensemble Σ des énoncés suivants :

- $\forall x \, \neg R(x,x)$,
- $\forall x \forall y \; R(x,y) \leftrightarrow R(y,x)$,
- pour chaque $n, \; m \geq 0$,

$$\forall x_1 ... \forall x_n \forall y_1 ... \forall y_m \left(\bigwedge_{i,\, j} x_i \neq y_j \right) \rightarrow \exists z \left(\bigwedge_i R(z, x_i) \wedge \bigwedge_j \neg R(z, y_j) \right).$$

Montrer que Σ est consistant. (Indication : en utilisant (a), on pourra construire un modèle de Σ à l'aide d'une chaîne de graphes finis).

(c) Soit T la théorie axiomatisée par Σ.

Montrer que tout modèle de T est infini.

(d) Montrer que T est ω-catégorique.

(e) Soit Γ le modèle dénombrable de T. (Ce graphe s'appelle le graphe aléatoire.)

-i- Montrer que Γ est homogène ; c'est-à-dire que tout isomorphisme partiel de Γ entre deux sous-graphes finis se prolonge en un automorphisme de Γ.

-ii- Montrer que Γ est universel ; c'est-à-dire que tout graphe fini est isomorphe à un sous-graphe de Γ.

-iii- Montrer que tout graphe homogène et universel est modèle de T.

(f) Montrer que T est instable.

Exercice 2. Soient $\mathcal{M}$ une L-structure fortement minimale et $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ une formule de L sans paramètres tel que $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$ et $\bar{y} = (y_1, ..., y_l)$.

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout entier $k \geq 0$, l'ensemble

$$\{\bar{b} \in M^l : \mathrm{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{b})) = k\}$$

est définissable.

Fixons un entier k tel que $0 < k \leq n$.

(a) Soit $\theta(x_1, .., x_k, \bar{y})$ une formule sans paramètres.

-i- Soit $\bar{b} \in M^l$.
Montrer que $\mathrm{RM}(\theta(x_1, ..., x_k, \bar{b})) = k$ si et seulement si $\theta(x_1, ..., x_k, \bar{b}) \in p^k$ où p^k est l'unique type de rang de Morley k dans $S_k(M)$.

-ii- En déduire que l'ensemble $\{\bar{b} \in M^l : \mathrm{RM}(\theta(x_1, ..., x_k, \bar{b})) = k\}$ est définissable.

(b) -i- Soit $\bar{b} \in M^l$ tel que $\mathrm{RM}(\phi(x_1, ..., x_n, \bar{b})) \geq k$.
Montrer qu'il existe $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_{n-k} \leq n$ tel que

$$\mathrm{RM}(\exists x_{i_1} \exists x_{i_2} ... \exists x_{i_{n-k}} \phi(x_1, ..., x_n, \bar{b})) = k.$$

-ii- En déduire que l'ensemble $\{\bar{b} \in M^l : \mathrm{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{b})) \geq k\}$ est définissable.

(c) Conclure.

Exercice 3. Soit T la théorie de la relation d'équivalence E qui a, pour chaque entier $n > 0$, une et une seule classe de cardinal n.

(a) Montrer que T est complète. (Indication : montrer qu'entre deux modèles ω-saturés de T, il existe toujours un va-et-vient.)

(b) La théorie T élimine-t-elle les quantificateurs ? (Justifiez votre réponse.)

(c) Soit $\mathcal{M}$ un modèle ω-saturée de T. Montrer que l'ensemble

$$X = \{b \in M : \mathrm{RM}(E(x, b)) = 0\}$$

n'est pas définissable. (On pourra tout d'abord vérifier que $X = \mathrm{acl}(\emptyset)$.)