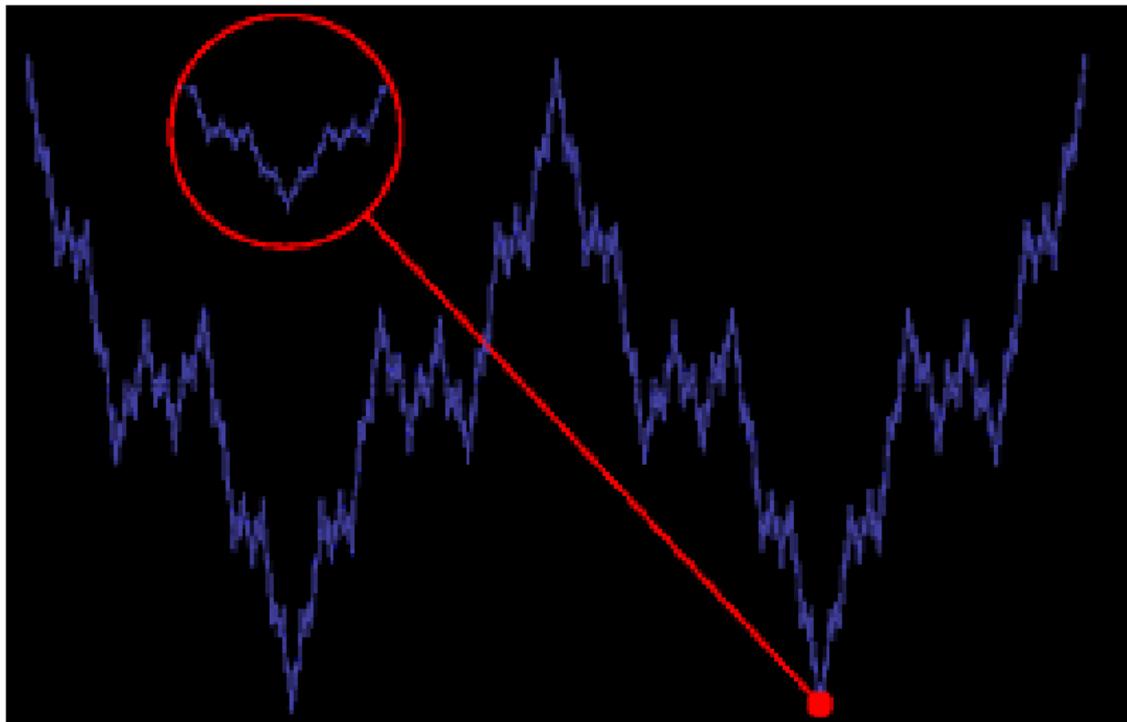
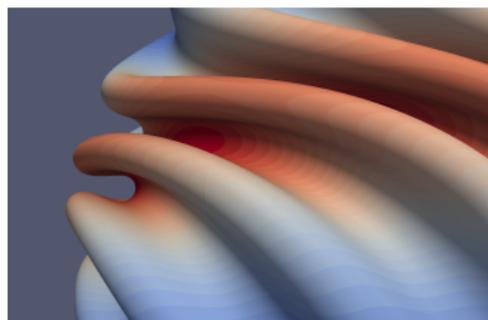


CM 3 : Fractales lisses en dimension 1



Les corrugations de Gromov



- Lorsque Mikhaïl Gromov invente la théorie de l'intégration convexe, il utilise une façon de créer des corrugations qui n'est ni celle de William Thurston (contemporaine),

$$f(t) = f_0(t) + \delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}_0(t)$$

ni celle de Mélanie Theillière (postérieure)

$$f(t) := f_0(t) + \frac{1}{N} \int_0^{Nt} (\gamma_t(s) - \bar{\gamma}_t) ds.$$

Les corrugations de Gromov

Formule d'intégration convexe de Gromov.— Soient $f_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application, $(\gamma_t)_{t \in [0, 1]}$ une famille continue de lacets de \mathbb{R}^n et $N > 0$ un entier naturel, on définit une nouvelle application f en posant pour tout $t \in [0, 1]$:

$$f(t) := f_0(0) + \int_0^t \gamma_s(Ns) ds.$$

On dit que f a été obtenue à partir de f_0 par *intégration convexe* et on note

$$f = CI(f_0, \gamma, N).$$

Les corrugations de Gromov

Proposition.— Soit $f = CI(f_0, \gamma, N)$ où $\bar{\gamma}_t = f'_0(t)$ pour tout t . Alors :

$$i) \|f - f_0\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$ii) f'(t) = \gamma(Nt, t)$$

Les corrugations de Gromov

Proposition.— Soit $f = CI(f_0, \gamma, N)$ où $\bar{\gamma}_t = f'_0(t)$ pour tout t . Alors :

$$i) \|f - f_0\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$ii) f'(t) = \gamma(Nt, t)$$

- Les propriétés de la formule d'Intégration Convexe (CI) sont similaires à celles vérifiées par le Procédé de Corrugation (CP). Il y a néanmoins de subtiles mais importantes différences entre elles.

Les corrugations de Gromov

Proposition.— Soit $f = CI(f_0, \gamma, N)$ où $\bar{\gamma}_t = f'_0(t)$ pour tout t . Alors :

$$i) \|f - f_0\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$ii) f'(t) = \gamma(Nt, t)$$

- Les propriétés de la formule d'Intégration Convexe (CI) sont similaires à celles vérifiées par le Procédé de Corrugation (CP). Il y a néanmoins de subtiles mais importantes différences entre elles.
- Pour CP le point *ii*) n'est vrai qu'à un $O\left(\frac{1}{N}\right)$ près. La formule (CI) permet de cibler plus précisément la dérivée que l'on souhaite atteindre.

Les corrugations de Gromov

Proposition.— Soit $f = CI(f_0, \gamma, N)$ où $\bar{\gamma}_t = f'_0(t)$ pour tout t . Alors :

$$i) \|f - f_0\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$ii) f'(t) = \gamma(Nt, t)$$

- Les propriétés de la formule d'Intégration Convexe (CI) sont similaires à celles vérifiées par le Procédé de Corrugation (CP). Il y a néanmoins de subtiles mais importantes différences entre elles.
- Pour CP le point *ii*) n'est vrai qu'à un $O\left(\frac{1}{N}\right)$ près. La formule (CI) permet de cibler plus précisément la dérivée que l'on souhaite atteindre.
- Mais (CI) a de mauvaises propriétés de recollement. Si $f_0(0) = f_0(1)$ et si $f = CI(f_0, \gamma, N)$ alors $f(0) \neq f(1)$ en général.

Les corrugations de Gromov

Démonstration. – Puisque

$$f(t) := f_0(0) + \int_0^t \gamma_s(Ns) ds$$

en dérivant on obtient $f'(t) = \gamma_t(Nt)$ ce qui prouve le point *ii*).

Les corrugations de Gromov

Démonstration. – Puisque

$$f(t) := f_0(0) + \int_0^t \gamma_s(Ns) ds$$

en dérivant on obtient $f'(t) = \gamma_t(Nt)$ ce qui prouve le point *ii*).

• Le point *i*) est plus technique. On note $n = \lfloor Nt \rfloor$ et

$$I_j = \left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N} \right] \quad \text{et} \quad I_n = \left[\frac{n}{N}, t \right].$$

pour tout $0 \leq j \leq n-1$. On a

$$f(t) - f_0(0) = \sum_{k=0}^n f^{[k]} \quad \text{avec} \quad f^{[k]} = \int_{I_k} \gamma(s, Ns) ds.$$

Les corrugations de Gromov

- En utilisant la propriété de moyenne de la famille de lacets γ_x on obtient

$$\begin{aligned}f_0(t) &= f_0(0) + \int_{x=0}^t \frac{\partial f_0}{\partial x}(x) dx \\ &= f_0(0) + \int_{x=0}^t \int_{u=0}^1 \gamma(x, u) du dx.\end{aligned}$$

Les corrugations de Gromov

- En utilisant la propriété de moyenne de la famille de lacets γ_x on obtient

$$\begin{aligned}f_0(t) &= f_0(0) + \int_{x=0}^t \frac{\partial f_0}{\partial x}(x) dx \\ &= f_0(0) + \int_{x=0}^t \int_{u=0}^1 \gamma(x, u) du dx.\end{aligned}$$

- On a comme précédemment

$$f_0(t) - f_0(0) = \sum_{j=0}^n f_0^{[j]}$$

où

$$f_0^{[j]} = \int_{R_j} \gamma(x, u) dx du$$

et $R_j = I_j \times [0, 1]$.

Les corrugations de Gromov

- On s'intéresse d'abord aux indices $j \in [0, n - 1]$. Le changement de variable $u = Ns - j$ permet d'écrire

$$f^{[j]} = \int_0^1 \frac{1}{N} \gamma \left(\frac{u+j}{N}, u \right) du.$$

Les corrugations de Gromov

- On s'intéresse d'abord aux indices $j \in [0, n - 1]$. Le changement de variable $u = Ns - j$ permet d'écrire

$$f^{[j]} = \int_0^1 \frac{1}{N} \gamma \left(\frac{u+j}{N}, u \right) du.$$

- On pose

$$\begin{aligned} H_j : R_j &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, u) &\mapsto \gamma \left(\frac{u+j}{N}, u \right). \end{aligned}$$

afin de constater que

$$f^{[j]} = \int_{R_j} H_j(x, u) dx du.$$

Les corrugations de Gromov

- On peut ainsi comparer les deux intégrales

$$|f^{[j]} - f_0^{[j]}| \leq \int_{R_j} \|\gamma(\frac{u+j}{N}, u) - \gamma(x, u)\| dx du \leq \frac{1}{N^2} \|\partial_1 \gamma\|_{C^0}.$$

Dans cette inégalité, on a utilisé le fait que l'aire de

$$\text{Aire}(R_j) = \text{Aire}([\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}] \times [0, 1]) = \frac{1}{N}.$$

Les corrugations de Gromov

- On peut ainsi comparer les deux intégrales

$$|f^{[j]} - f_0^{[j]}| \leq \int_{R_j} \|\gamma(\frac{u+j}{N}, u) - \gamma(x, u)\| dx du \leq \frac{1}{N^2} \|\partial_1 \gamma\|_{C^0}.$$

Dans cette inégalité, on a utilisé le fait que l'aire de

$$\text{Aire}(R_j) = \text{Aire}([\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}] \times [0, 1]) = \frac{1}{N}.$$

- Pour le cas $j = n$ on écrit simplement :

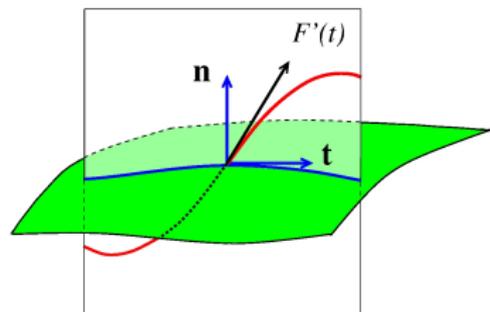
$$\|f^{[n]} - f_0^{[n]}\| \leq \|f^{[n]}\| + \|f_0^{[n]}\| \leq \frac{2}{N} \|\gamma\|_{C^0}.$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \|f(t) - f_0(t)\| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \|f^{[j]} - f_0^{[j]}\| + \|F^{[n]} - f_0^{[n]}\| \\ &\leq \frac{1}{N} \|\partial_1 \gamma\|_{C^0} + \frac{2}{N} \|\gamma\|_{C^0}. \end{aligned}$$

□

Un problème isométrique 1D



Problème isométrique le long d'une courbe.— Étant donné un nombre $\delta > 0$, une immersion $f_0 : [0, 1] \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ et une fonction

$$r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

telle que

$$\forall t \in [0, 1], \quad r(t) > \|f'_0(t)\|,$$

trouver $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que

- i) $\forall t \in [0, 1], \quad F'(t) \in \text{Vect}(f'_0(t), \mathbf{n})$
- ii) $\forall t \in [0, 1], \quad \|F'(t)\| = r(t)$
- iii) $\|F - f_0\|_{C^0} \leq \delta$

Un problème isométrique 1D

- On peut voir ce problème comme une QFIC. La relation différentielle \mathcal{R}_t dépend de t : c'est un cercle de rayon $r(t)$. dans le plan $\text{Vect}(f'_0(t), \mathbf{n})$.

Un problème isométrique 1D

- On peut voir ce problème comme une QFIC. La relation différentielle \mathcal{R}_t dépend de t : c'est un cercle de rayon $r(t)$. dans le plan $\text{Vect}(f'_0(t), \mathbf{n})$.

- Puisque $r(t) > \|f'_0(t)\|$, pour tout t ,

$$f'_0(t) \in \text{IntConv}(\mathcal{R}_t).$$

Un problème isométrique 1D

- On peut voir ce problème comme une QFIC. La relation différentielle \mathcal{R}_t dépend de t : c'est un cercle de rayon $r(t)$. dans le plan $\text{Vect}(f'_0(t), \mathbf{n})$.

- Puisque $r(t) > \|f'_0(t)\|$, pour tout t ,

$$f'_0(t) \in \text{IntConv}(\mathcal{R}_t).$$

- Une solution formelle est donnée par le couple

$$\left(f_0, r \frac{f'_0}{\|f'_0\|} \right).$$

Un problème isométrique 1D

- On peut voir ce problème comme une QFIC. La relation différentielle \mathcal{R}_t dépend de t : c'est un cercle de rayon $r(t)$. dans le plan $\text{Vect}(f'_0(t), \mathbf{n})$.

- Puisque $r(t) > \|f'_0(t)\|$, pour tout t ,

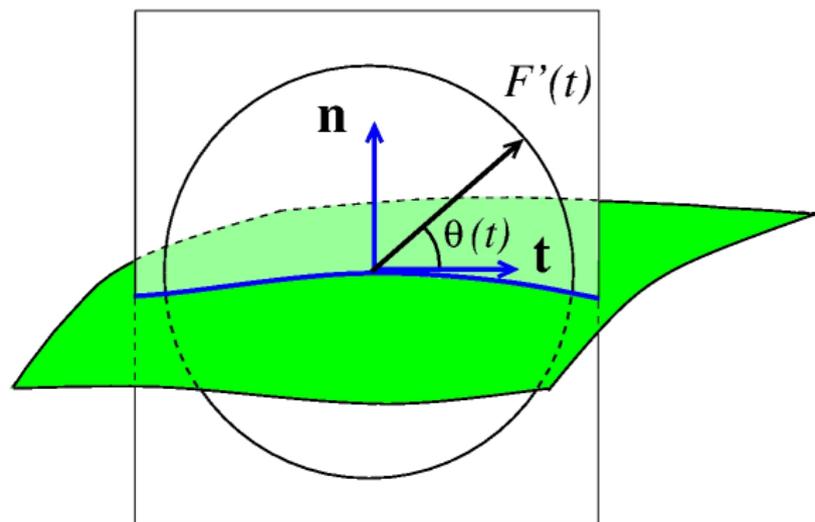
$$f'_0(t) \in \text{IntConv}(\mathcal{R}_t).$$

- Une solution formelle est donnée par le couple

$$\left(f_0, r \frac{f'_0}{\|f'_0\|} \right).$$

- On va donc appliquer la Théorie de l'Intégration Convexe et en profiter pour utiliser la *formule d'intégration convexe* de Gromov.

Un problème isométrique 1D

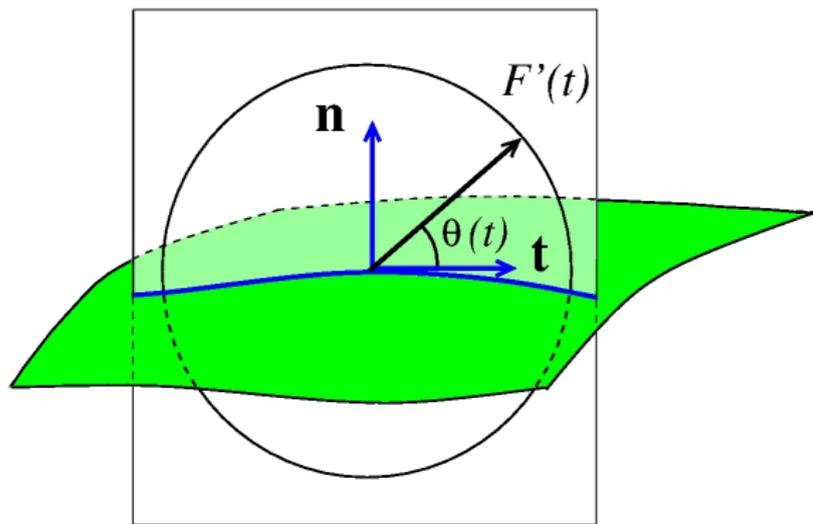


- Il nous faut d'abord trouver une famille de lacets $(\gamma_t)_{t \in [0,1]}$ telle que

$$\bar{\gamma}_t = f'_0(t) \quad \text{et} \quad \gamma_t(s) \in \mathcal{R}_t$$

pour tout $(t, s) \in [0, 1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Un problème isométrique 1D

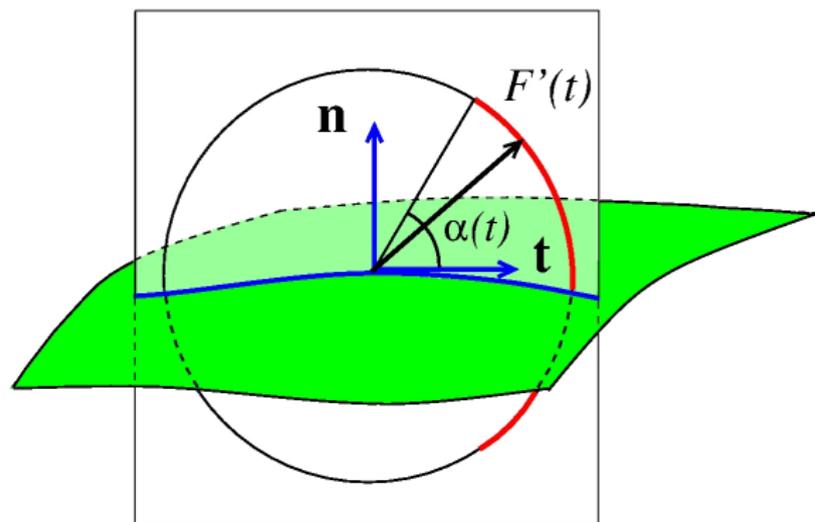


- On cherche donc γ_t sous la forme

$$\gamma_t(s) = r(t)\mathbf{e}^{i\theta(t,s)}$$

où $\theta : [0, 1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{e}^{i\theta} := \cos \theta \mathbf{t} + \sin \theta \mathbf{n}$ avec $\mathbf{t} := \frac{f'_0}{\|f'_0\|}$.

Un problème isométrique 1D



- Un choix possible pour θ est

$$\theta(t, s) = \alpha(t) \cos 2\pi s$$

où $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est fonction.

Choix de α

- Il ne reste plus qu'à déterminer α pour que $\bar{\gamma}_t = f'_0(t)$ c'est-à-dire telle que

$$\int_0^1 r(t) \mathbf{e}^{i\alpha(t) \cos(2\pi s)} \, ds = f'_0(t)$$

i.e.

$$\int_0^1 r(t) (\cos \theta(t, \mathbf{s}) \mathbf{t}(t) + \sin \theta(t, \mathbf{s}) \mathbf{n}(t)) \, ds = \|f'_0(t)\| \mathbf{t}(t).$$

Choix de α

- Il ne reste plus qu'à déterminer α pour que $\bar{\gamma}_t = f'_0(t)$ c'est-à-dire telle que

$$\int_0^1 r(t) \mathbf{e}^{i\alpha(t) \cos(2\pi s)} ds = f'_0(t)$$

i.e.

$$\int_0^1 r(t) (\cos \theta(t, s) \mathbf{t}(t) + \sin \theta(t, s) \mathbf{n}(t)) ds = \|f'_0(t)\| \mathbf{t}(t).$$

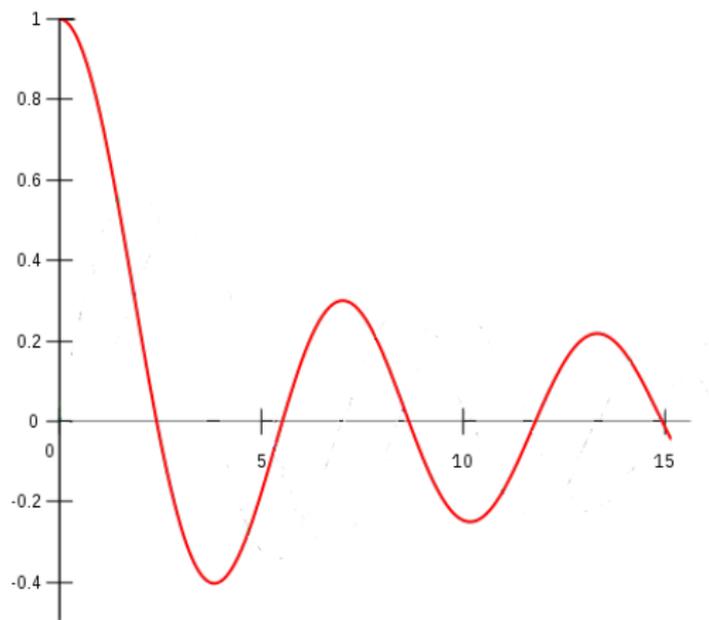
- Puisque

$$\int_0^1 \sin \theta(t, s) ds = 0$$

il vient

$$\int_0^1 \cos(\alpha(t) \cos(2\pi s)) ds = \|f'_0(t)\|.$$

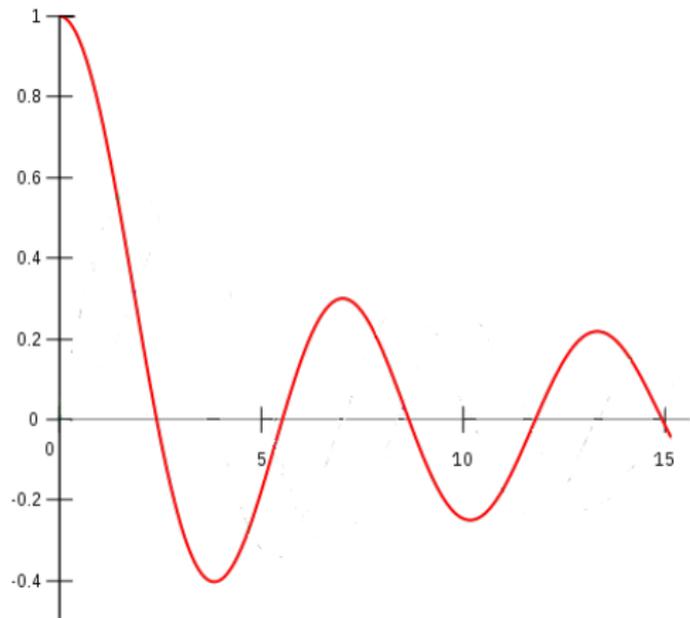
La fonction de Bessel



Graphe de la fonction de Bessel J_0

$$J_0(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\alpha \sin \pi t) dt$$

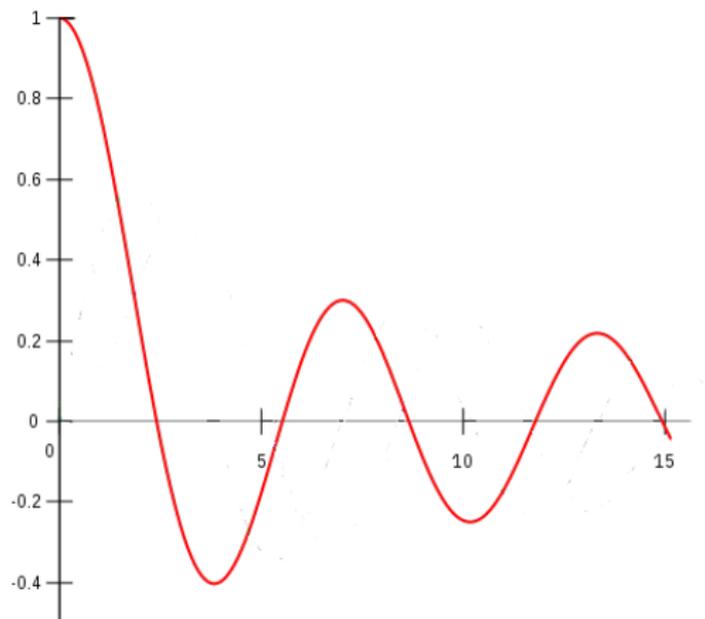
La fonction de Bessel



Graphe de la fonction de Bessel J_0

$$J_0(\alpha) = \int_0^1 \cos(\alpha \cos 2\pi t) dt$$

La fonction de Bessel



Graphe de la fonction de Bessel J_0

$$J_0(\alpha) = 1 - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^4}{64} + o(\alpha^4)$$

Choix de α

- L'équation

$$\int_0^1 r(t) \mathbf{e}^{i\alpha(t) \cos(2\pi s)} \, ds = f'_0(t)$$

est donc équivalente à

$$J_0(\alpha(t)) = \frac{\|f'_0(t)\|}{r(t)}.$$

Choix de α

- L'équation

$$\int_0^1 r(t) e^{i\alpha(t) \cos(2\pi s)} ds = f'_0(t)$$

est donc équivalente à

$$J_0(\alpha(t)) = \frac{\|f'_0(t)\|}{r(t)}.$$

- Une solution est donnée par

$$\alpha(t) = J_0^{-1} \left(\frac{\|f'_0(t)\|}{r(t)} \right)$$

où J_0^{-1} est l'inverse de J_0 sur l'intervalle maximum $[0, x_{max}]$ où elle est inversible.

- Il est facile de voir qu'au voisinage de 1

$$J_0^{-1}(\xi) \sim 2\sqrt{1-\xi}$$

Un exemple d'application

Application.– Soit f_0 la paramétrisation du cercle de rayon r_0 suivante

$$\begin{aligned} f_0 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \frac{r_0}{2\pi} e^{2i\pi t} \end{aligned}$$

Notons que $\|f_0'(t)\| = r_0$. Soit $r > r_0$ et δ . On cherche une immersion $F : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

- i) $\forall t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \|F'(t)\| = r$
- ii) $\|F - f_0\|_{C^0} \leq \delta$

Un exemple d'application

Application.– Soit f_0 la paramétrisation du cercle de rayon r_0 suivante

$$\begin{aligned} f_0 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \frac{r_0}{2\pi} e^{2i\pi t} \end{aligned}$$

Notons que $\|f_0'(t)\| = r_0$. Soit $r > r_0$ et δ . On cherche une immersion $F : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\begin{aligned} i) \quad &\forall t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad \|F'(t)\| = r \\ ii) \quad &\|F - f_0\|_{C^0} \leq \delta \end{aligned}$$

- D'après ce que l'on vient de faire

$$F(t) = Cl(f_0, \gamma, N)(t) = f_0(0) + \int_0^t \gamma_s(Ns) ds$$

où

$$\gamma_t(s) = r(t) (\cos \theta(t, s) \mathbf{t}(t) + \sin \theta(t, s) \mathbf{n}(t)) \, ds = \|f_0'(t)\| \mathbf{t}(t)$$

convient si N est suffisamment grand.

Un exemple d'application

- Sauf que... rien ne garantit que $F(1) = F(0)$. En effet, pour cela il faudrait que

$$\int_0^1 \gamma_s(Ns) ds = 0.$$

Un exemple d'application

- Sauf que... rien ne garantit que $F(1) = F(0)$. En effet, pour cela il faudrait que

$$\int_0^1 \gamma_s(Ns) ds = 0.$$

- En revanche, compte tenu du fait que $\gamma_0 = \gamma_1$, on a $F'(1) = F'(0)$.

Un exemple d'application

- Sauf que... rien ne garantit que $F(1) = F(0)$. En effet, pour cela il faudrait que

$$\int_0^1 \gamma_s(Ns) ds = 0.$$

- En revanche, compte tenu du fait que $\gamma_0 = \gamma_1$, on a $F'(1) = F'(0)$.

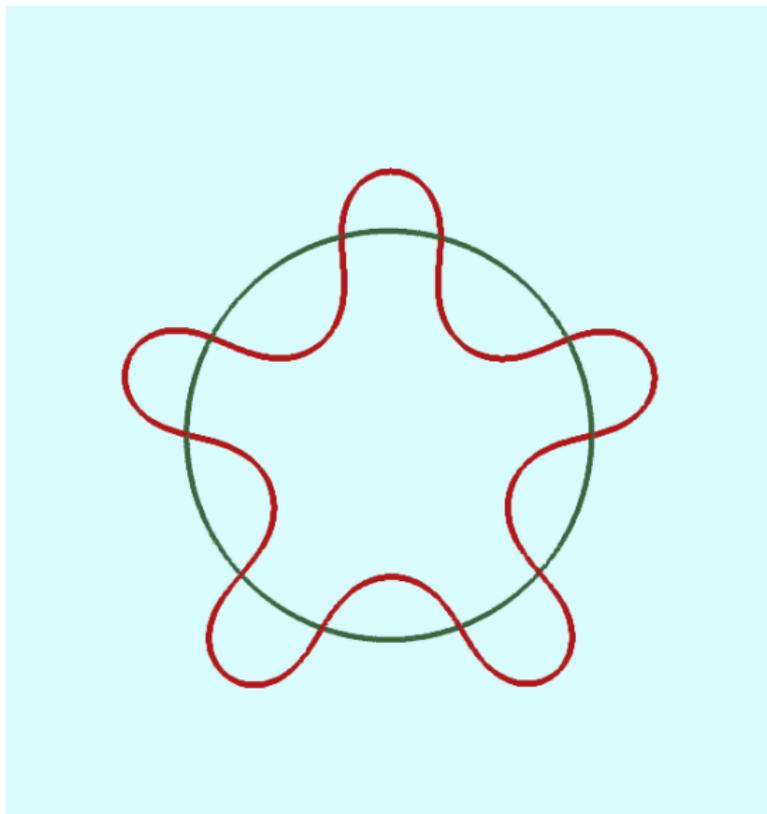
Exercice.— Montrer que si f_0

- (*Cond 1*) a une vitesse constante
- (*Cond 2*) est radialement symétrique : $\frac{\partial f_0}{\partial x}(x + \frac{1}{2}) = -\frac{\partial f_0}{\partial x}(x)$.

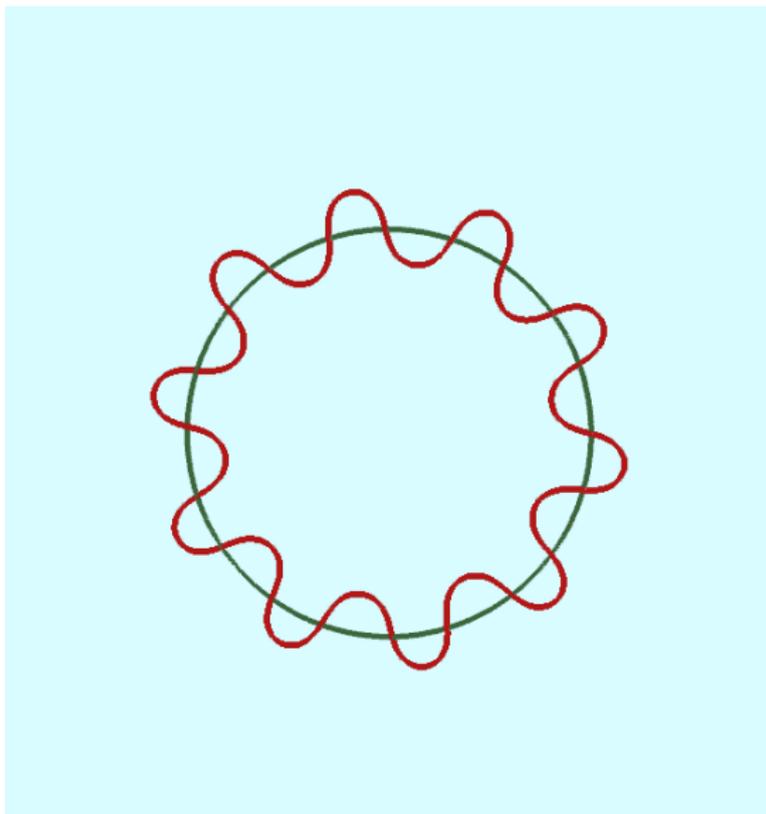
alors $F(0) = F(1)$.

Montrer de plus que F satisfait aux deux conditions.

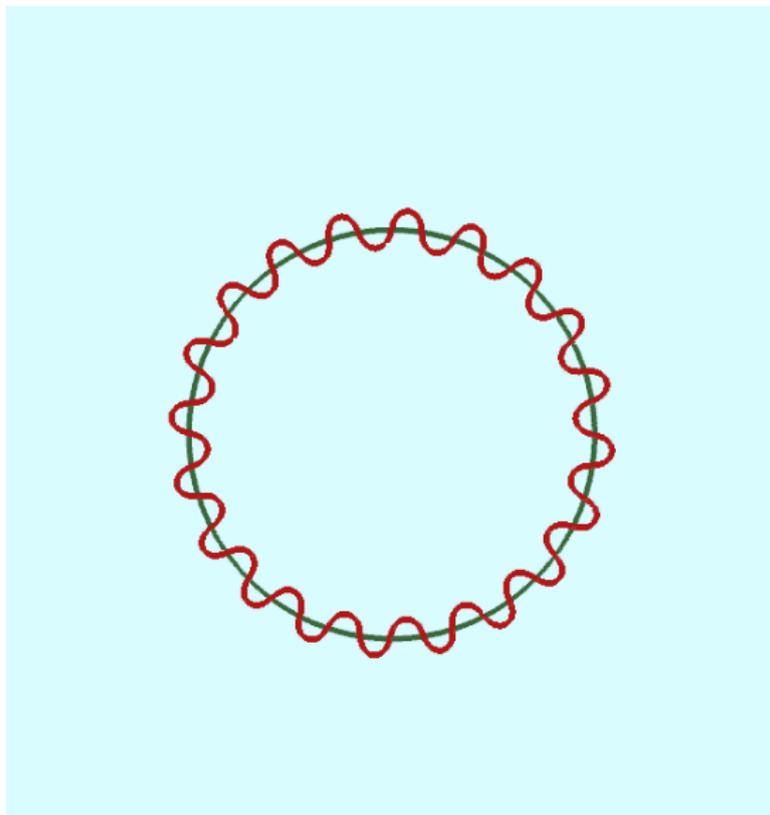
Application : $r_0 = 0.5$, $r = 1$ et $N = 5$



Application : $r_0 = 0.5$, $r = 1$ et $N = 10$



Application : $r_0 = 0.5$, $r = 1$ et $N = 20$



Fractales C^1

- Nous allons empiler itérativement des intégrations convexes afin d'obtenir à la limite une *fractale* C^1 .

Fractales C^1

- Nous allons empiler itérativement des intégrations convexes afin d'obtenir à la limite une *fractale* C^1 .
- On part d'un cercle de longueur $r_0 = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{rcl} f_0 : [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \frac{r_0}{2\pi} e^{2i\pi t} \end{array}$$

Fractales C^1

- Nous allons empiler itérativement des intégrations convexes afin d'obtenir à la limite une *fractale* C^1 .
- On part d'un cercle de longueur $r_0 = \frac{1}{2}$

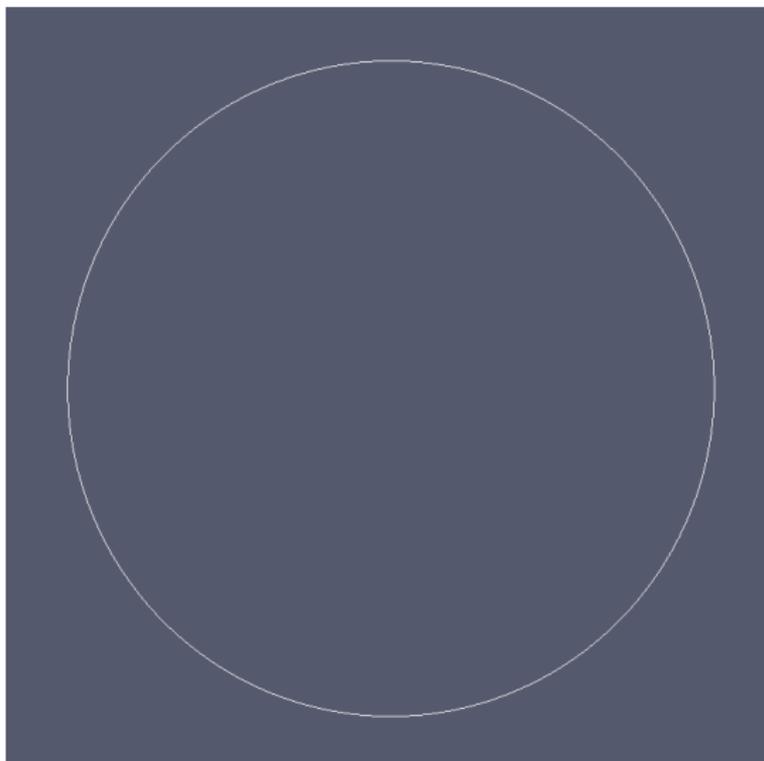
$$\begin{aligned} f_0 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \frac{r_0}{2\pi} e^{2i\pi t} \end{aligned}$$

- On construit itérativement des courbes $f_k : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ de longueurs $r_k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}^*$, en appliquant la formule de l'intégration convexe :

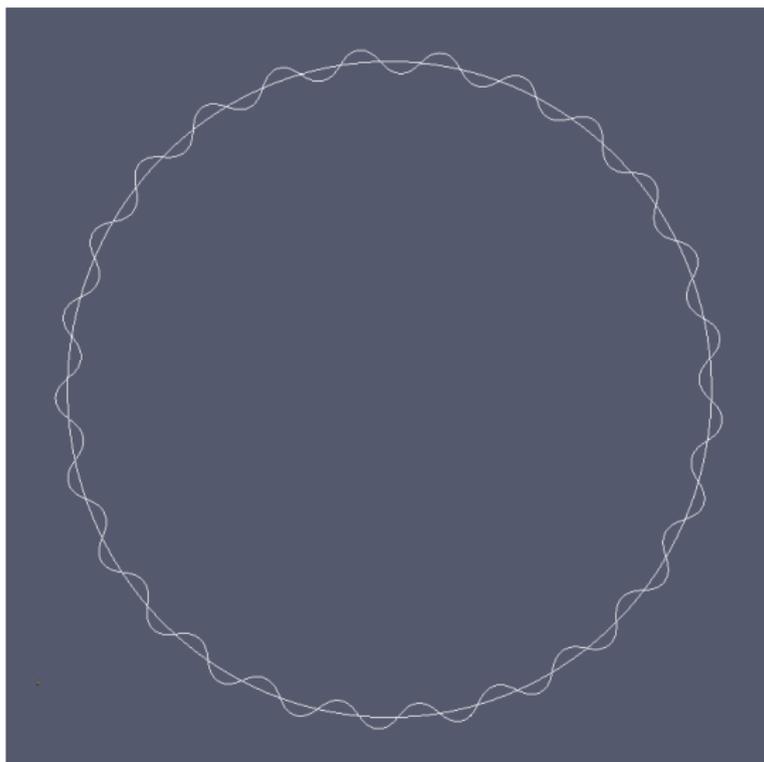
$$f_k(t) := f_{k-1}(0) + \int_0^t r_k e^{i\alpha_k \cos 2\pi N_k u} du$$

Dans cette formule, $\alpha_k = J_0^{-1} \left(\frac{r_{k-1}}{r_k} \right)$ et $N_k \in \mathbb{N}^*$ est un paramètre libre.

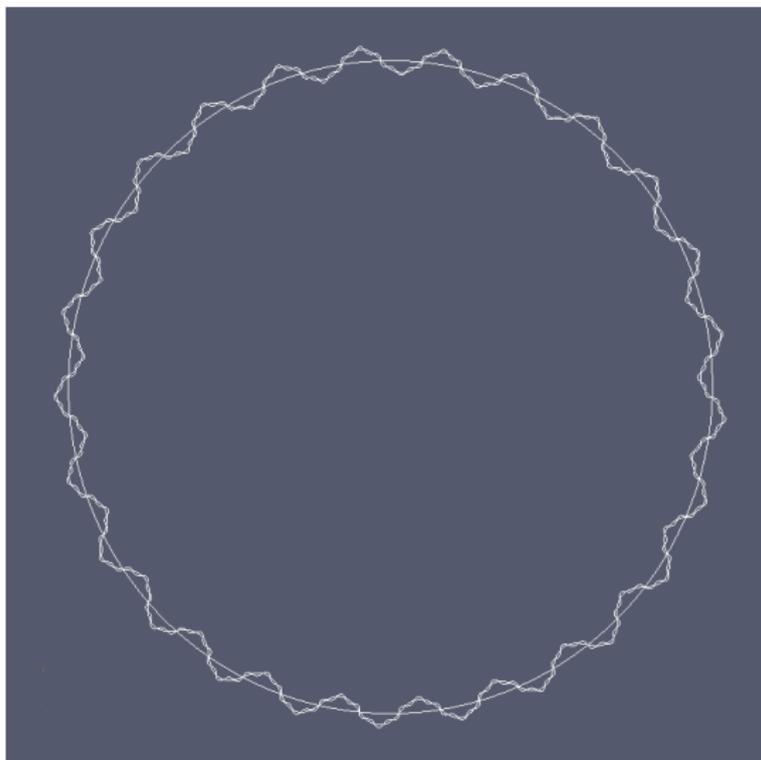
Fractales C^1



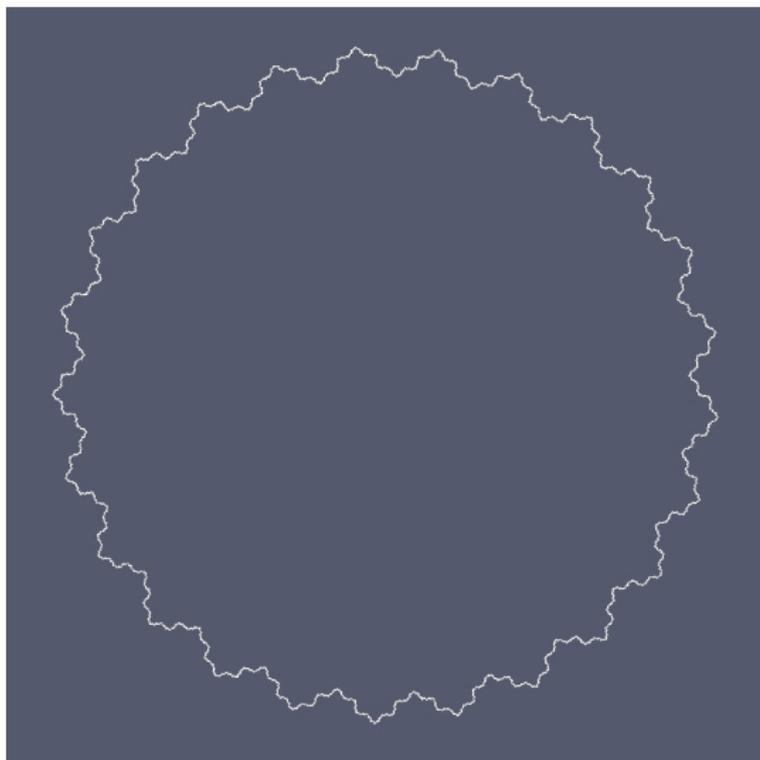
Fractales C^1



Fractales C^1



Fractales C^1



Fractales C^1

- Rappelons que

$$\mathbf{e}^{i\theta} = \cos \theta \mathbf{t}_{k-1} + \sin \theta \mathbf{n}_{k-1}$$

or ici

$$\mathbf{t}_{k-1} = \frac{f'_{k-1}}{\|f'_{k-1}\|} = \frac{1}{r_{k-1}} f'_{k-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_{k-1} = i \mathbf{t}_{k-1}$$

donc

$$\mathbf{e}^{i\theta} = \frac{1}{r_{k-1}} \mathbf{e}^{i\theta} f'_{k-1}$$

et

$$f_k(t) := f_{k-1}(0) + \frac{r_k}{r_{k-1}} \int_0^t \mathbf{e}^{i\alpha_k \cos(2\pi N_k u)} f'_{k-1}(u) \, du$$

Fractales C^1

- Rappelons que

$$\mathbf{e}^{i\theta} = \cos \theta \mathbf{t}_{k-1} + \sin \theta \mathbf{n}_{k-1}$$

or ici

$$\mathbf{t}_{k-1} = \frac{f'_{k-1}}{\|f'_{k-1}\|} = \frac{1}{r_{k-1}} f'_{k-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_{k-1} = i \mathbf{t}_{k-1}$$

donc

$$\mathbf{e}^{i\theta} = \frac{1}{r_{k-1}} \mathbf{e}^{i\theta} f'_{k-1}$$

et

$$f_k(t) := f_{k-1}(0) + \frac{r_k}{r_{k-1}} \int_0^t \mathbf{e}^{i\alpha_k \cos(2\pi N_k u)} f'_{k-1}(u) \, du$$

Proposition.— Pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$f'_k(t) = \frac{r_k}{r_{k-1}} \mathbf{e}^{i\alpha_k \cos(2\pi N_k t)} f'_{k-1}(t)$$

Corollaire 1.– *Pour tout $t \in [0, 1]$, on a*

$$f'_k(t) = \frac{r_k}{r_0} \left(\prod_{j=1}^{j=k} e^{i\alpha_j \cos(2\pi N_j t)} \right) f'_0(t)$$

Corollaire 1.– *Pour tout $t \in [0, 1]$, on a*

$$f'_k(t) = \frac{r_k}{r_0} \left(\prod_{j=1}^{j=k} e^{i\alpha_j \cos(2\pi N_j t)} \right) f'_0(t)$$

Lemme.– *Quel que soit le choix de la suite $(N_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, la suite de fonctions*

$$t \mapsto A_k(t) := \sum_{j=1}^{j=k} \alpha_j \cos(2\pi N_j t)$$

converge normalement vers une limite notée A_∞ (et qui est donc nécessairement continue)

Fractales C^1

- En effet, on montre que

$$\alpha_k = J_0^{-1} \left(\frac{r_{k-1}}{r_k} \right) \sim \frac{\sqrt{3}}{2} 2^{-\frac{k}{2}}$$

Puisque $\sum 2^{-\frac{k}{2}}$ est convergente, il en est de même de $\sum \alpha_k$. On en déduit que $\sum \alpha_k \cos(2\pi N_k t)$ est normalement convergente puis que

$$A_\infty(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cos(2\pi N_j t)$$

est C^0 .

Fractales C^1

- En effet, on montre que

$$\alpha_k = J_0^{-1} \left(\frac{r_{k-1}}{r_k} \right) \sim \frac{\sqrt{3}}{2} 2^{-\frac{k}{2}}$$

Puisque $\sum 2^{-\frac{k}{2}}$ est convergente, il en est de même de $\sum \alpha_k$. On en déduit que $\sum \alpha_k \cos(2\pi N_k t)$ est normalement convergente puis que

$$A_\infty(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cos(2\pi N_j t)$$

est C^0 .

Corollaire 2. – *La suite f_k converge vers une fonction f_∞ qui est C^1 et telle que pour tout $t \in [0, 1]$*

$$f'_\infty(t) = \left(\prod_{j=1}^{\infty} e^{i\alpha_j \cos(2\pi N_j t)} \right) \frac{f'_0(t)}{r_0} = e^{iA_\infty(t)} \mathbf{t}_0(t)$$

Fractales C^1

Corollaire 3.– *Pour tout $t \in [0, 1]$, on a*

$$\mathbf{t}_\infty(t) = e^{iA_\infty(t)} \mathbf{t}_0(t) \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_\infty(t) = e^{iA_\infty(t)} \mathbf{n}_0(t)$$

Fractales C^1

Corollaire 3.– Pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\mathbf{t}_\infty(t) = e^{iA_\infty(t)} \mathbf{t}_0(t) \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_\infty(t) = e^{iA_\infty(t)} \mathbf{n}_0(t)$$

Observation.– En général, A_∞ n'est pas C^1 et donc f_∞ n'est pas C^2 .

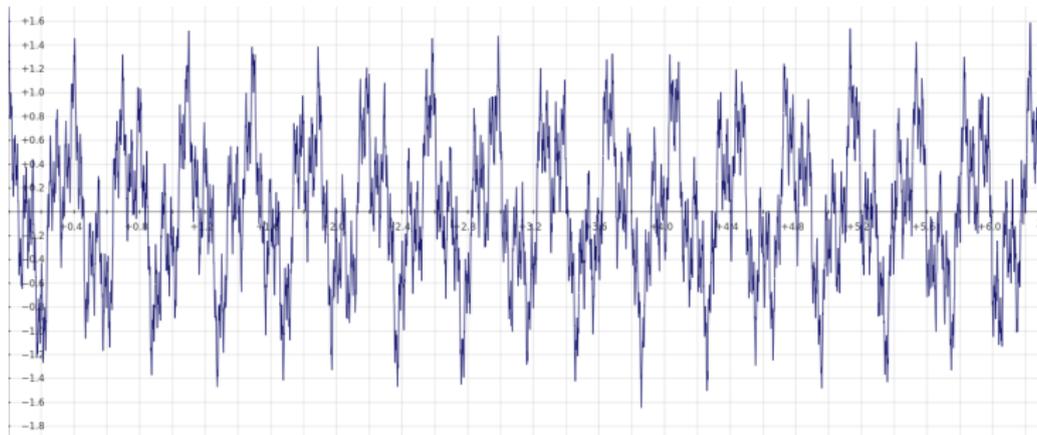
Fractales C^1

Corollaire 3.– Pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\mathbf{t}_\infty(t) = e^{iA_\infty(t)} \mathbf{t}_0(t) \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_\infty(t) = e^{iA_\infty(t)} \mathbf{n}_0(t)$$

Observation.– En général, A_∞ n'est pas C^1 et donc f_∞ n'est pas C^2 .

Exemple.– Graphe de A_∞ avec $\alpha_k = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt{2}\right)^{-k}$ et $N_k = e^k$



Fonction de Weierstrass

Définition.— Soient $0 < a < 1 < ab$. La *fonction de Weierstrass* est la fonction définie par

$$W_{a,b}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(b^k t)$$

Fonction de Weierstrass

Définition.— Soient $0 < a < 1 < ab$. La *fonction de Weierstrass* est la fonction définie par

$$W_{a,b}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(b^k t)$$

Observation.— Puisque

$$A_{\infty}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(2\pi N_k t)$$

avec

$$\alpha_k \sim \alpha_0 a^k, \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

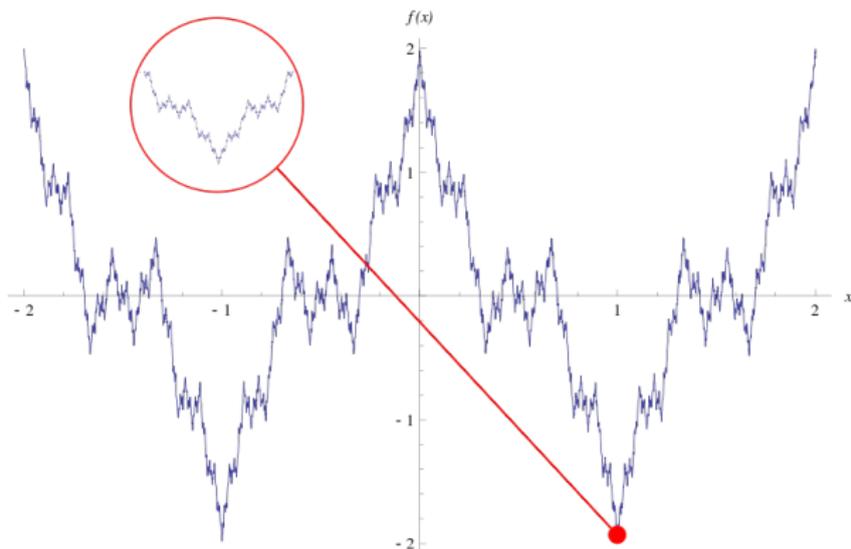
la fonction A_{∞} est similaire à une fonction de Weierstrass si l'on choisit $N_k = N_0 b^k$ avec $b > a^{-1}$.

Fonction de Weierstrass

Proposition.– *La fonction de Weierstrass est continue partout mais dérivable nulle part.*

Fonction de Weierstrass

Proposition.— *La fonction de Weierstrass est continue partout mais dérivable nulle part.*



Proposition.— *Le graphe de la fonction de Weierstrass est une fractale.*

Fonction de Weierstrass

Théorème (2017, Gerhard Keller et Weixiao Shen).– *La dimension fractale du graphe de la fonction de Weierstrass est $2 + \ln(a)/\ln(b)$*

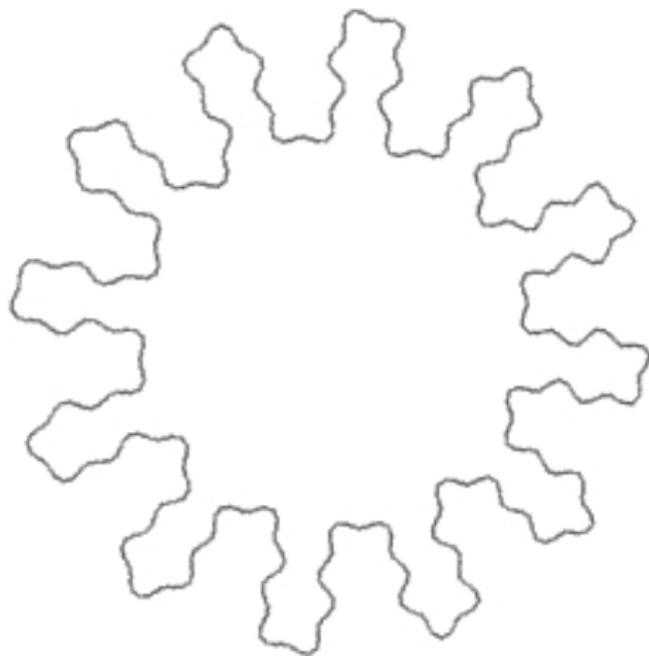
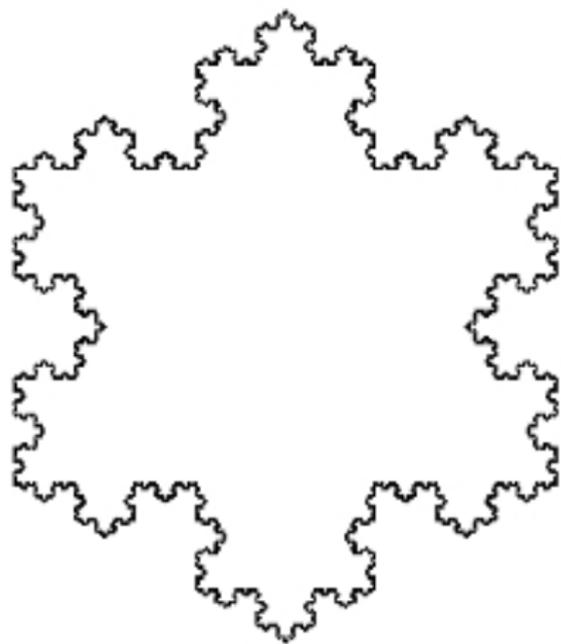
Fonction de Weierstrass

Théorème (2017, Gerhard Keller et Weixiao Shen).– *La dimension fractale du graphe de la fonction de Weierstrass est $2 + \ln(a)/\ln(b)$*

Structure géométrique de f_∞ .– L'application f_∞ est C^1 mais si les N_k croissent exponentiellement alors le graphe de f'_∞ ainsi que ceux de \mathbf{t}_∞ et de \mathbf{n}_∞ sont fractals. Ainsi, le graphe de f_∞ peut être considéré comme l'intégrale d'une fractale.

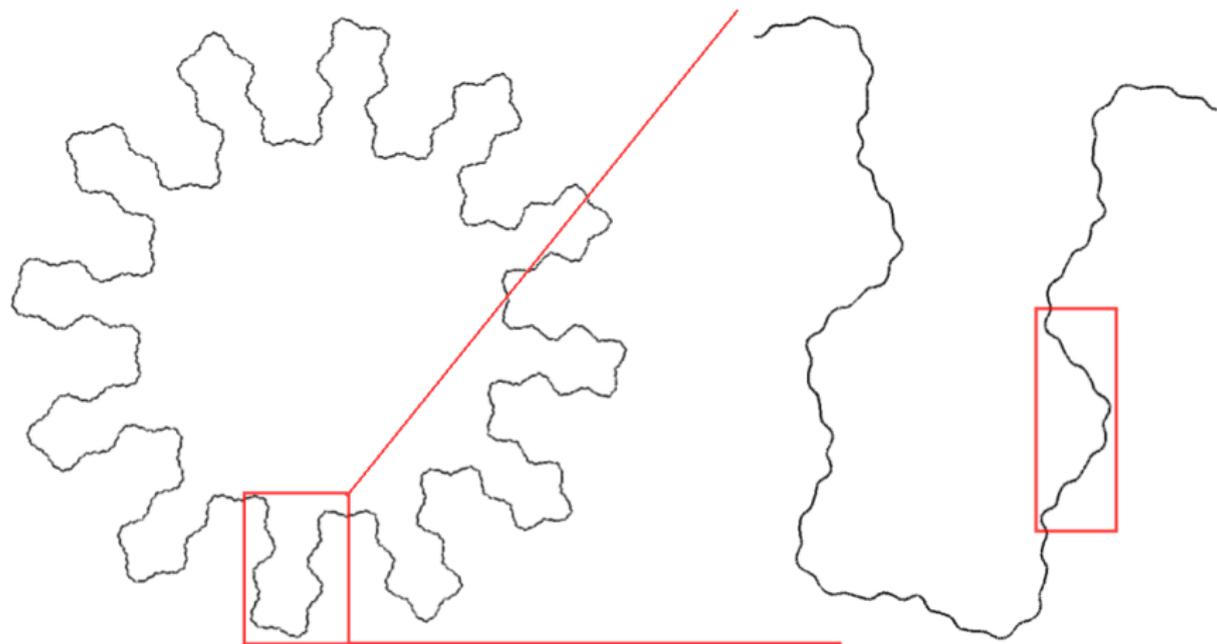
On appelle une telle structure géométrique, une C^1 -**fractale** ou encore une **fractale lisse**.

Fractale versus C^1 -fractale

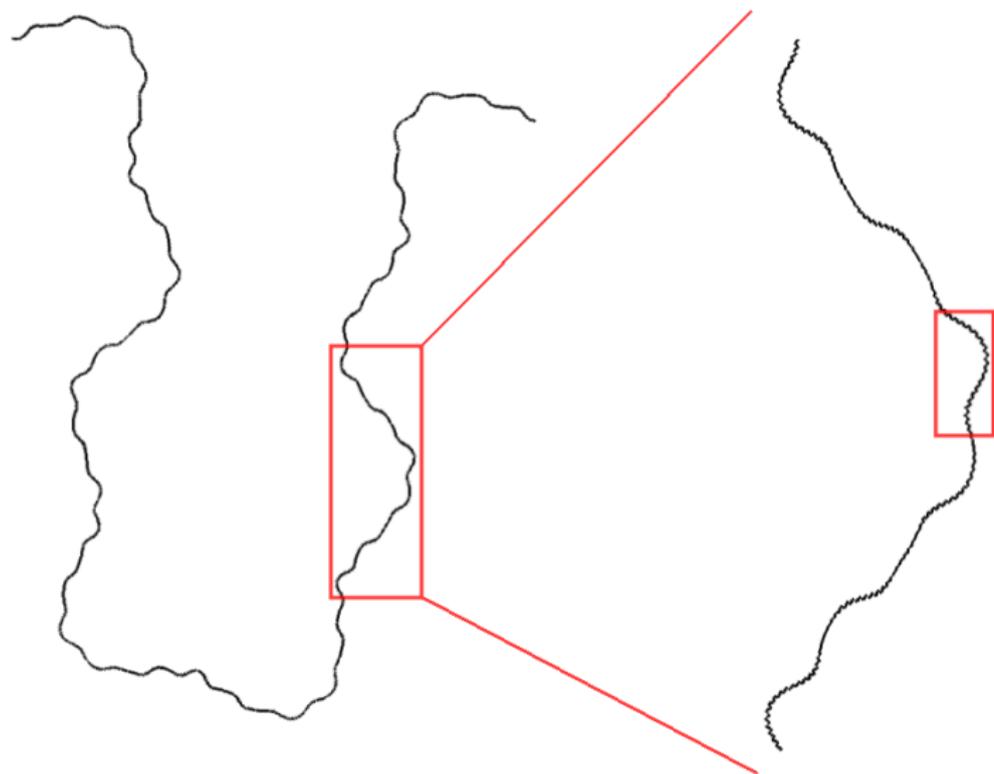


Une courbe de Von Koch et un méridien du tore plat 3D

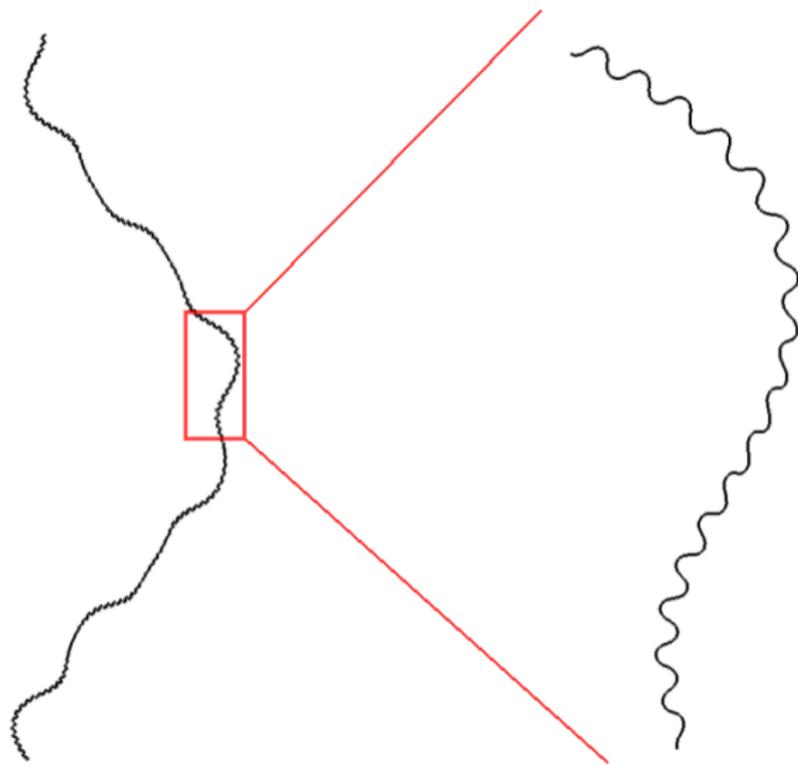
Une quasi auto-similarité



Une quasi auto-similarité



Une quasi auto-similarité





That's all Folks!

Karl Weierstrass