CM1
Vincent Borrelli

Applications affines

I. Définitions et premières propriétés.

Définition Un espace affine est la donnée d'un couple $(E, \vec{E})$ où E est un ensemble et $\vec{E}$ est un espace vectoriel, et d'une application de $E \times \vec{E}$ dans E qui à $M \in E$, $v \in \vec{E}$ associe un point N noté $M + \vec{v}$ vérifiant les conditions suivantes :

a) $\forall M \in E, \quad M + \vec{0} = M$

b) $\forall M \in E, \ \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E} \times \vec{E}, \quad M + (\vec{v} + \vec{u}) = (M + \vec{v}) + \vec{u}$

c) $\forall (M, N) \in E \times E, \ \exists \vec{v} \in \vec{E}$ t.q $N = M + \vec{v}$ (on note parfois $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$)

d) $\forall M \in E, \ \forall \vec{v} \in \vec{E}, \quad M + \vec{v} = M \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

Exercice 1 : Mq $\vec{E}$ et E sont en bijection (Suggestion : Soit $N \in E$, considérer $\Phi : \vec{E} \to E, \vec{v} \mapsto N + \vec{v}$)

Définition Soient E et F deux espaces affines. Une application affine de E dans F est une application $f : E \to F$ telle qu'il existe une application linéaire $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{F}$ de sorte que : $\forall (M, N) \in E \times E$: $\vec{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M) f(N)}$

Cette relation peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\forall (M, \vec{v}) \in E \times \vec{E}, \quad f(M + \vec{v}) = f(M) + \vec{f}(\vec{v})}$$

Elle porte alors le nom de formule de Grassmann. Elle montre que f est déterminée par l'image d'un repère affine, c'est-à-dire $(n+1)$ points $(O, A_1, \dots, A_n)$ t.q $(\overrightarrow{OA_1}, \dots, \overrightarrow{OA_n})$ soit une base de $\vec{E}$

Exemples 1. La translation $f = t_{\vec{u}}$, $f(M) = M + \vec{u}$, est une application affine.

$$\overrightarrow{f(M) f(N)} = \overrightarrow{(M + \vec{u})(N + \vec{u})} = \overrightarrow{(M + \vec{u})(M + \overrightarrow{MN} + \vec{u})}$$
$$= \overrightarrow{(M + \vec{u})(M + \vec{u} + \overrightarrow{MN})} = \overrightarrow{MN}$$

d'où $\vec{f} = id$.

2. L'homothétie $f = h_{O,k}$, $M' = f(M)$, $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{(O+k\overrightarrow{OM})(O+k\overrightarrow{ON})} = \overrightarrow{(O+k\overrightarrow{OM})(O+k\overrightarrow{OM}+k\overrightarrow{MN})} = k\overrightarrow{MN}$$

donc $\vec{f} = k\,id$

<u>Exercice 2</u>: Mq la composée de deux applications affines est affine et que $\overrightarrow{f\circ g} = \vec{f}\circ\vec{g}$

<u>Définition</u> Une partie F non vide de E est un sous-espace affine s'il existe un point $A \in F$ tel que $\vec{F} = \{\overrightarrow{AM} \,/\, M \in F\}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$

<u>Proposition</u> Soit $f : E \to E$ une application affine. Si $\mathrm{Fix} f = \{M \in E \,/\, f(M) = M\}$ est non vide alors c'est un sous-espace affine de E

<u>Démonstration</u> Soit $A \in \mathrm{Fix}\, f$ (qui est non vide). On va montrer que $\vec{F} = \{\overrightarrow{AM} \,/\, M \in \mathrm{Fix}\, f\}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.

Or

$$\begin{aligned}
\{\overrightarrow{AM} \,/\, M \in \mathrm{Fix}\, f\} &= \{\overrightarrow{AM} \,/\, f(M) = M\} \\
&= \{\overrightarrow{AM} \,/\, f(M) - f(A) = M - A\} && \text{car } f(A) = A \\
&= \{\overrightarrow{AM} \,/\, \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{AM}\} \\
&= \{\overrightarrow{AM} \,/\, \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM}\} && \text{car } f \text{ affine} \\
&= \mathrm{Ker}(\vec{f} - id)
\end{aligned}$$

□

<u>Remarque</u>: Dans la définition le choix du point $A \in F$ est indifférent. Si F est un sous-espace affine et $B \in F$ alors $\overrightarrow{AB} \in \vec{F}$ et

$$\begin{aligned}
\{\overrightarrow{BM} \,/\, M \in F\} &= \{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \,/\, M \in F\} \\
&= \overrightarrow{BA} + \vec{F} \\
&= \vec{F} && \text{car } \overrightarrow{BA} \in \vec{F}
\end{aligned}$$

Proposition L'image directe par une application affine $f : E \to H$ d'un sous espace affine est un sous-espace affine.

Démonstration Soit $F \subset E$ un s.e.a et $A \in F$. Il faut montrer que $\overrightarrow{f(F)} = \{\overrightarrow{A'M'} \mid M' \in f(F)\}$ est un s.e.v de $\vec{H}$.

Or

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f(F)} &= \{\overrightarrow{A'M'} \mid \exists M \in F : M' = f(M)\} \\
&= \{\overrightarrow{A'M'} \mid \exists M \in F : \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{f(A)f(M)}\} \\
&= \{\overrightarrow{A'M'} \mid \exists M \in F : \overrightarrow{A'M'} = \vec{f}(\overrightarrow{AM})\} \quad \text{car } f \text{ est affine} \\
&= \vec{f}(\vec{F})
\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{f(F)}$ est un s.e.v car c'est l'image d'un s.e.v par une application linéaire $\square$

Quelques propriétés immédiates des applications affines

- L'image directe par une application affine d'un s.e.a est un s.e.a
- L'image réciproque " " " " "
- Une application affine conserve
  - l'alignement de points
  - le parallélisme
  - le barycentre
  - le rapport vectoriel ($\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$)

Applications 1. Si une application affine a deux points fixes distincts, alors tout point de la droite passant par ces deux points est laissé fixe par cette application affine (conservation du barycentre)

2. Le birapport est conservé par une application affine (rapport vectoriel)

II) Le groupe affine

On note $GA(E)$ l'ensemble des automorphismes de E, c'est-à-dire des applications affines de $E \to E$ qui sont bijectives.

Lemme. f affine bijective $\Rightarrow f^{-1}$ affine.

Démonstration : Soit $A \in E$, $A' = f(A)$. On pose

$$g(M) = g(A') + (\vec{f})^{-1}(\overrightarrow{A'M}) \qquad \text{avec } g(A') = A$$

Notons que $(\vec{f})^{-1}$ existe car f inversible $\Rightarrow \vec{f}$ inversible (En effet si $\vec{v} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ est tel que $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \vec{0}$ alors $f(B) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AB}) = f(A)$ et f non bijective)

L'application g est affine et

$$\begin{aligned} f\circ g(M) &= f(g(A') + (\vec{f})^{-1}(\overrightarrow{A'M}) \\ &= f(g(A')) + \vec{f}\circ(\vec{f})^{-1}(\overrightarrow{A'M}) \quad \text{(Formule de Grassmann)} \\ &= A' + \overrightarrow{A'M} = M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\circ f(M) &= g(f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AM})) \\ &= g\circ f(A) + (\vec{f})^{-1}\circ\vec{f}(\overrightarrow{AM}) = A + \overrightarrow{AM} = M \end{aligned}$$

□

Avec ce lemme, il est très facile de voir que GA(E) est un groupe pour la loi $\circ$.

On pose :

$$\varphi : GA(E) \longrightarrow Gl(\vec{E})$$
$$f \longmapsto \vec{f}$$

La flèche φ est un morphisme (c'est l'exercice 2) qui est trivialement surjectif.

Soit $f \in \ker\varphi$ i.e. $\vec{f} = id$, $O \in E$ une origine quelconque :

$$f(M) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OM})$$
$$\Rightarrow \quad M' = O' + \overrightarrow{OM}$$
$$= O' + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = M + \overrightarrow{OO'}$$

donc f est une translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. Ainsi :

$\ker\varphi = \mathcal{T}$ = sous-groupe normal des translations affines de E.

Prop. $GA(E)/\mathcal{T} \simeq GL(\vec{E})$

Soit O une origine quelconque, on note $GA(E,O)$ les éléments de $GA(E)$ qui fixent O. Notons que $GA(E,O)$ est en bijection avec $Gl(\vec{E})$ par $g \overset{\Phi}{\longmapsto} \vec{g}$. A partir de $\vec{g}$ on retrouve g par la relation : $g(M) = O + \vec{g}(\overrightarrow{OM})$.

Fait : Tout élément $f \in GA(E)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$f = t\circ g$$

avec $g \in GA(E,O)$ et $t \in \mathcal{T}$.

Existence : Soit $g = t_{-\overrightarrow{OO'}}\circ f$ où $O' = f(O)$. On a $g(O) = O$ d'où $g \in GA(E,O)$

puis $f = t_{+\overrightarrow{OO'}} \circ g$.

Unicité : $f = t_1 \circ g_1 = t_2 \circ g_2 \Rightarrow t_1 \circ g_1(O) = t_2 \circ g_2(O)$

$\Rightarrow t_1(O) = t_2(O) \Rightarrow t_1 = t_2$

et donc $g_1 = t_1^{-1} \circ f = t_2^{-1} \circ f = g_2$.

<u>Question</u> : Comment se composent deux éléments $f_1 = t_{u_1} \circ g_1$ et $f_2 = t_{u_2} \circ g_2$?

Prop. $f \circ t_{\vec{u}} \circ f^{-1} = t_{\vec{f}(\vec{u})}$, $f \in GA(E)$

<u>Démonstration</u>. $\mathcal{T}$ étant normal, $f \circ t_{\vec{u}} \circ f^{-1}$ est une translation

Soit O une origine quelconque et $O' = f(O)$ alors :

$$f \circ t_{\vec{u}} \circ f^{-1}(O') = f \circ t_{\vec{u}}(O) = f(O + \vec{u}) = O' + \vec{f}(\vec{u}) \qquad \square$$

<u>Rem</u> : Cette relation donne la règle de commutation d'une translation avec un élément de $GA(E)$: $f \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{f}(\vec{u})} \circ f$

<u>Application</u> : $f_1 \circ f_2 = t_{\vec{u}_1} \circ g_1 \circ t_{\vec{u}_2} \circ g_2 = t_{\vec{u}_1} \circ t_{\vec{g}_1(\vec{u}_2)} \circ g_1 \circ g_2$

$= t_{\vec{u}_1 + \vec{g}_1(\vec{u}_2)} \circ g_1 \circ g_2$

<u>Définition</u> Le produit semi-direct de deux groupes H et K selon le morphisme $\theta : K \longrightarrow Aut(H)$ est le produit G de H et K muni de la loi $*$:

$$(h_1, k_1) * (h_2, k_2) = (h_1 \theta(k_1)(h_2), k_1 k_2)$$

Il est noté $G = H \rtimes_\theta K$

Prop $GA(E) \simeq \vec{E} \rtimes_\theta Gl(\vec{E})$ avec $\theta = id : Gl(\vec{E}) \longrightarrow Aut(\vec{E}) = Gl(\vec{E})$

On identifie un élément $f = t_{\vec{u}} \circ g$ avec le couple $(\vec{u}, \vec{g}) \in \vec{E} \times Gl(\vec{E})$.

On a : $(\vec{u}_1, \vec{g}_1) * (\vec{u}_2, \vec{g}_2) = (\vec{u}_1 + \theta(\vec{g}_1)(\vec{u}_2), \vec{g}_1 \circ \vec{g}_2)$

$= (\vec{u}_1 + \vec{g}_1(\vec{u}_2), \vec{g}_1 \circ \vec{g}_2)$

Modulo l'identification de f avec $(\vec{u}, \vec{g})$, on retrouve la loi de composition des applications affines.

III) Quelques applications affines remarquables

3.1. Le groupe des homothéties et des translations

On note $\mathcal{D}(E)$ l'ensemble des homothéties et des translations et on cherche le groupe engendré par $\mathcal{D}(E)$ et on va montrer que ce groupe est $\mathcal{D}(E)$ lui-même. Remarquons déjà que l'inverse d'une homothétie est une homothétie et l'inverse d'une translation, une translation.

Fait : Les applications affines dont la partie linéaire est une homothétie vectorielle sont des homothéties et des translations.

On a déjà vu que : f translation $\Rightarrow \vec{f} = id$. La réciproque est très simple :

$$f(M) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OM}) \Rightarrow M' = O' + \overrightarrow{OM} = O' + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = M + \overrightarrow{OO'}.$$

On a aussi vu que : f homothétie $\Rightarrow \vec{f} = k\,id$. Supposons donc $\vec{f} = k\,id$, $k \neq 1$ et montrons que cela entraîne que f est une homothétie. Pour cela on va d'abord montrer que f a un point fixe.

$$f(M) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OM}) \Rightarrow M' = O' + k\overrightarrow{OM} = O' + k\overrightarrow{OO'} + k\overrightarrow{O'M}$$

d'où :

$$\overrightarrow{O'M'} - k\overrightarrow{O'M} = k\overrightarrow{OO'}$$

et M est fixe ssi $\overrightarrow{O'M} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{OO'}$. On note I l'unique point fixe de f caractérisé par la relation $\overrightarrow{O'I} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{OO'}$. On a :

$$M' = I + \vec{f}(\overrightarrow{IM}) \Rightarrow \overrightarrow{IM'} = \vec{f}(\overrightarrow{IM}) = k\,\overrightarrow{IM}$$

et f est une homothétie.

Prop. Le groupe engendré par les homothéties et les translations est l'ensemble $\mathcal{D}(E)$ lui-même muni de la loi $\circ$.

En effet, la composée d'homothéties affines et de translations est encore une homothétie ou une translation car vectoriellement cela revient à des composées d'homothéties vectorielles.

Produit d'homothéties : Le produit $h_{I,k} \circ h_{J,k'}$ de deux homothéties est :

- si $kk' = 1$: une translation $t_{\vec{v}}$ avec $\vec{v} = (k-1)\overrightarrow{IJ}$
- si $kk' \neq 1$: une homothétie $h_{K,kk'}$ avec $K = I + \dfrac{k(1-k')}{1-kk'}\overrightarrow{IJ}$

Démonstration La partie linéaire de $h_{I,k} \circ h_{J,k'}$ est une homothétie vectorielle.

- Si $kk' = 1$, cette partie vectorielle est l'id, donc $h_{I,k} \circ h_{J,k'}$ est une translation $t_{\vec{v}}$. En particulier $\vec{v} = \overrightarrow{JJ'}$ où $J' = h_{I,k} \circ h_{J,k}(J)$, ainsi $\overrightarrow{IJ'} = k\overrightarrow{IJ}$ et donc $\vec{v} = \overrightarrow{JJ'} = \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IJ'} = (k-1)\overrightarrow{IJ}$
- Si $kk' \neq 1$, la partie vectorielle de $h_{I,k} \circ h_{J,k'}$ est une homothétie vectorielle de rapport kk' donc $h_{I,k} \circ h_{J,k'}$ est une homothétie affine de rapport kk'. Soit K son centre, on a : $K = h_{I,k} \circ h_{J,k'}(K)$ ou encore $K = h_{I,k}(K')$ avec $K' = h_{J,k'}(K)$.

Ainsi : $\overrightarrow{JK'} = k'\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{IK} = k\overrightarrow{IK'}$.

Par conséquent : $\overrightarrow{IK} = k(\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK'}) = k(\overrightarrow{IJ} + k'\overrightarrow{JK}) = k(\overrightarrow{IJ} + k'\overrightarrow{JI} + k'\overrightarrow{IK})$

d'où $\overrightarrow{IK} = \dfrac{k(1-k')}{1-kk'}\overrightarrow{IJ}$ □

Produit d'une homothétie et d'une translation • Le produit $t_{\vec{u}} \circ h_{J,k}$ $(k \neq 1)$ est une homothétie de même rapport k et de centre $K = J + \dfrac{1}{1-k}\vec{u}$

• Le produit $h_{J,k} \circ t_{\vec{u}}$ est une homothétie $h_{K,k}$ avec $K = J + \dfrac{k}{1-k}\vec{u}$

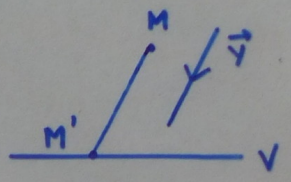
Démonstration Puisque la partie linéaire de $t_{\vec{u}} \circ h_{J,k}$ est une homothétie de rapport k, $t_{\vec{u}} \circ h_{J,k}$ est une homothétie affine de rapport k et dont il reste à déterminer le centre K. On a : $K = t_{\vec{u}} \circ h_{J,k}(K) = t_{\vec{u}}(K')$ avec $K' = h_{J,k}(K)$

Ainsi : $\vec{u} = \overrightarrow{K'K} = \overrightarrow{K'J} + \overrightarrow{JK} = -\overrightarrow{JK'} + \overrightarrow{JK} = (1-k)\overrightarrow{JK}$ soit $K = J + \dfrac{1}{1-k}\vec{u}$.

On procède de façon analogue pour $h_{J,k} \circ t_{\vec{u}}$ □

3.2. Projections et symétries

Soit $V \neq \emptyset$ un s.e.a de E, $\vec{Y}$ un s.e.v de $\vec{E}$ t.q $\vec{Y} \oplus \vec{V} = \vec{E}$



Définition L'application qui a un point $M \in E$ associe le point $M' \in V$ t.q. $\overrightarrow{MM'} \in \vec{Y}$ est appelée la projection sur V parallèlement à $\vec{Y}$

⚠ La projection affine n'est pas caractérisée par le fait que sa partie linéaire est une projection. En effet $t \circ p$ a la même partie linéaire et n'a pas de point fixe.

Prop. Soit $p : E \to E$ une application affine.
p est une projection affine $\Leftrightarrow p \circ p = p$

Rm : Cette proposition est bien connue dans le cadre vectoriel : $\vec{p}$ est une proj $\Leftrightarrow \vec{p} \circ \vec{p} = \vec{p}$.

Démonstration ($\Rightarrow$) Immédiat

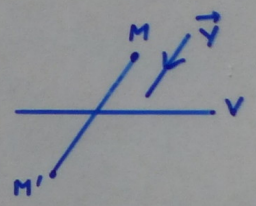
($\Leftarrow$) $p \circ p = p \Rightarrow \vec{p} \circ \vec{p} = \vec{p}$ donc $\vec{p}$ est une projection vectorielle sur $\vec{V} = \vec{p}(\vec{E})$ parallèlement à $\vec{Y} = (\vec{p} - id)(\vec{E}) = \operatorname{Ker} \vec{p}$ $\quad (\vec{p} \circ (\vec{p} - id)) = 0$

Soit $V = p(E)$ et $O \in V$, on a : $M' = p(M) = O + \vec{p}(\overrightarrow{OM})$ d'où :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \vec{p}(\overrightarrow{OM}) = (\vec{p} - id)(\overrightarrow{OM}) \in \vec{Y}$$

Ainsi p est une projection affine. $\square$

Définition L'application qui a un point M de E associe le point M' de E t.q. le milieu de MM' est dans V et $\overrightarrow{MM'} \in \vec{Y}$ est appelée la symétrie autour de V parallèlement à $\vec{Y}$

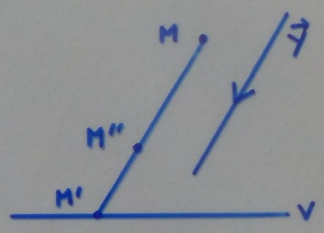


⚠ La symétrie affine n'est pas caractérisée par le fait que sa partie linéaire soit une symétrie vectorielle.

Prop. Soit $s : E \to E$ une application affine
s est une symétrie affine $\Leftrightarrow$ s est une involution ($s \circ s = id$)

Rem : C'est bien connu dans le cadre vectoriel. La démonstration est similaire à la proposition précédente.

3.3. Affinités



Définition. Une application qui associe à $M \in E$ l'unique point M'' t.q. $\overrightarrow{M'M''} = k\,\overrightarrow{M'M}$ où M' est le projeté de M sur V parallèlement à $\vec{Y}$, est appelée une affinité de base V, de rapport $k \neq 0$ et de direction $\vec{Y}$

. Si V est un hyperespace affine, cette application est appelée une dilatation.

Rem : . $k=0$ est exclu car dans ce cas, l'application obtenue — qui n'est autre qu'une projection — n'est pas bijective.

. Si $k=-1$, l'application obtenue est une symétrie.

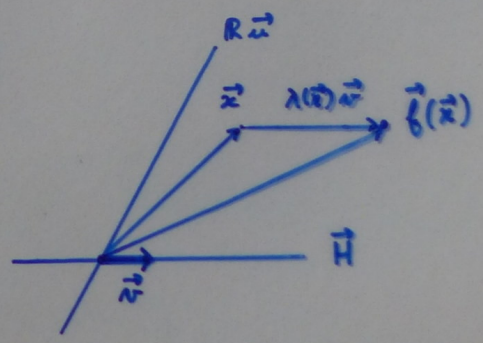
3.4 Transvections

Définition Soient $\vec{H}$ un hyperplan de $\vec{E}$ et $\vec{u} \in \vec{E}$ t.q. $\vec{E} = \vec{H} \oplus \mathbb{R}\vec{u}$

Tout élément $\vec{x} \in \vec{E}$ s'écrit : $\vec{x} = \vec{x}_H \oplus \vec{x}_{\vec{u}}$ avec $\vec{x}_{\vec{u}} = \lambda(\vec{x})\,\vec{u}$ pour une certaine forme linéaire $\lambda : \vec{E} \to \mathbb{R}$. Une transvection vectorielle d'hyperplan $\vec{H}$ est toute application linéaire de la forme :

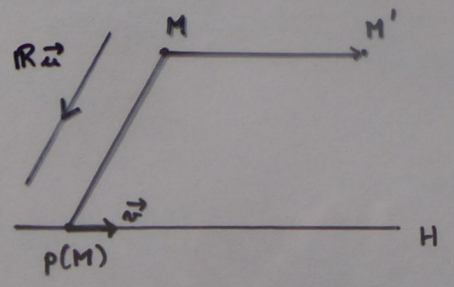
$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x} + \lambda(\vec{x})\,\vec{v}$$

pour un certain $\vec{v} \in \vec{H} \setminus \{\vec{0}\}$



Définition. Une transvection affine d'hyperplan H est une application affine fixe sur H et dont l'application vectorielle associée est une transvection vectorielle.

Rem Notons que les hyperplans parallèles à H sont conservés.



Culture : Les dilatations affines engendrent GA(E), les transvection SA(E).