Université Claude Bernard Lyon 1

M1 EADM – Géométrie

6 janvier 2012 - Durée 2 heures

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Montrer qu'une équation polaire d'une ellipse d'excentricité e et de distance foyer-directrice h est donnée par $\rho = \dfrac{eh}{1 + e\cos\theta}$.

2.– Montrer que les valeurs propres d'une matrice orthogonale sont de module 1.

3.– Le lieu des points $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 4xy + y^2 + 3x - y + 1 = 0\}$ est-il une ellipse ? Justifier.

4.– Soit N la normale (unitaire) principale d'une courbe plane γ paramétrée par la longueur d'arc. Montrer que $\frac{dN}{ds}(s) = -k(s)T(s)$ où $T(s) = \gamma'(s)$.

5.– Montrer que l'hélicoïde, c'est-à-dire la surface paramétrée

$$\begin{array}{rccc} f : & [0, 2\pi] \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & (v\cos u, v\sin u, u) \end{array}$$

est une surface réglée.

Le problème. – (10 pts) On note $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ le disque unité ouvert et $f_{a,b}$ l'application

$$\begin{array}{rccc} f_{a,b} : & D & \longrightarrow & D \\ & z & \longmapsto & \dfrac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}} \end{array}$$

où a et b sont deux nombres complexes tels que $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

1) Montrer que l'application $f_{a,b}$ est bien définie sur D (*i. e.* qu'elle n'a pas de pôle dans D).

2) Montrer que pour tout $z \in D$ on a

$$|f(z)|^2 < 1.$$

En déduire que l'application $f_{a,b}$ préserve bien D *i. e.* $f_{a,b}(D) \subset D$.

3) Montrer que l'on a $f_{a,b}(D) = D$ et que $f_{a,b}$ est bijective. Déterminer l'inverse de $f_{a,b}$.

4) Montrer que $f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{A,B}$ pour un certain couple $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ que l'on déterminera. Montrer aussi que $|A|^2 - |B|^2 = 1$.

5) Soient O l'origine de $\mathbb{C}$ et w un point quelconque de D. Montrer qu'il existe $f_{a,b}$ telle que $f_{a,b}(O) = w$. En déduire que pour tout couple (z, w) de points de D, il existe $f_{a,b}$ telle que $f_{a,b}(z) = w$.

6) Montrer que le développement limité à l'ordre 1 par rapport à u de $f_{a,b}$ s'écrit au point $z \in D$:

$$f_{a,b}(z + u) = f_{a,b}(z) + \frac{u}{(\bar{b}z + \bar{a})^2} + o(|u|).$$

En déduire l'expression de la différentielle $d(f_{a,b})_z(u)$.

7) Montrer que

$$1 - |f_{a,b}(z)|^2 = \frac{1 - |z|^2}{|(\bar{b}z + \bar{a})^2|}.$$

8) Pour chaque point $z \in D$ on définit une norme par

$$\|u\|_z = \frac{1}{1 - |z|^2}|u| \qquad (u \in \mathbb{C})$$

qui est appelée *norme hyperbolique* de u au point z. On dit qu'une application $f : D \longrightarrow D$ est une *isométrie* pour la norme hyperbolique si

$$\forall z \in D,\ \forall u \in \mathbb{C}, \quad \|df_z(u)\|_{f(z)} = \|u\|_z.$$

Montrer que $f_{a,b}$ est une isométrie pour la norme hyperbolique.

Note.– Le disque D muni de la norme hyperbolique est appelé le *disque de Poincaré*. Il joue un rôle très important en géométrie.