Université Claude Bernard Lyon 1

M1 EADM – Géométrie

Corrigé de l'examen du 6 janvier 2012

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Montrer qu'une équation polaire d'une ellipse d'excentricité e et de distance foyer-directrice h est donnée par $\rho = \dfrac{eh}{1 + e\cos\theta}$.

Rép.– Soit M un point de coordonnées polaires (ρ, θ). On a, dans le repère évident (d'origine le foyer F) :

$$\overrightarrow{FM} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MK} = \begin{pmatrix} h - \rho\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

où K est le projeté orthogonal de M sur la directrice. Ainsi

$$\begin{aligned} FM = eMK \quad &\Longleftrightarrow \quad FM^2 - e^2 MK^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \rho^2 - e^2(h - \rho\cos\theta)^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (\rho - e(h - \rho\cos\theta))(\rho + e(h - \rho\cos\theta)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \rho = \frac{eh}{1 + e\cos\theta} \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{-eh}{1 - e\cos\theta}. \end{aligned}$$

Puisque $\rho > 0$, on choisit $\rho = \dfrac{eh}{1 + e\cos\theta}$.

2.– Montrer que les valeurs propres d'une matrice orthogonale sont de module 1.

Rép.– Soit M une matrice orthogonale, $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre et X un vecteur propre non nul. On a

$$\begin{aligned} MX = \lambda X \quad &\Longrightarrow \quad {}^t\overline{X}{}^t\overline{M} = \overline{\lambda}{}^t\overline{X} \\ &\Longrightarrow \quad {}^t\overline{X}{}^t\overline{M}MX = \overline{\lambda}\lambda{}^t\overline{X}X \end{aligned}$$

avec ${}^t\overline{M}M = Id$ puisque M est orthogonale. Ainsi $\overline{\lambda}\lambda = 1$

3.– Le lieu des points $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 4xy + y^2 + 3x - y + 1 = 0\}$ est-il une ellipse ? Justifier.

Rép.– La forme quadratique à l'infini de $f(x,y) = 4x^2 + 4xy + y^2 + 3x - y + 1$ est $q(x,y) = 4x^2 + 4xy + y^2$. Cette forme s'écrit $q(x,y) =^t XQX$ avec

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Un calcul immédiat montre que les valeurs propres de Q sont 0 et 5. Ainsi, C ne peut être une ellipse.

4.– Soit N la normale (unitaire) principale d'une courbe plane γ paramétrée par la longueur d'arc. Montrer que $\frac{dN}{ds}(s) = -k(s)T(s)$ où $T(s) = \gamma'(s)$.

Rép.– En dérivant la relation $\langle N(s), N(s)\rangle = 1$ on obtient $\langle N'(s), N(s)\rangle = 0$. Il existe donc une fonction α telle que $N'(s) = \alpha(s)T(s)$. En dérivant la relation $\langle N(s), T(s)\rangle = 0$ on obtient $\langle N'(s), T(s)\rangle = -\langle N(s), T'(s)\rangle$. Or $T'(s) = k(s)N(s)$ par définition de la courbure et de la normale principale. Par conséquent $\alpha(s) = \langle N'(s), T(s)\rangle = -k(s)$ et finalement $N'(s) = -k(s)T(s)$.

5.– Montrer que l'hélicoïde, c'est-à-dire la surface paramétrée

$$\begin{array}{rccc} f : & [0, 2\pi] \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & (v\cos u, v \sin u, u) \end{array}$$

est une surface réglée.

Rép.– En effet, pour tout $(u,v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$, on a $f(u,v) = \alpha(u) + v\beta(u)$ avec $\alpha(u) = (0,0,u)$ et $\beta(u) = (\cos u, \sin u, 0)$.

Le problème. – (10 pts) On note $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ le disque unité ouvert et $f_{a,b}$ l'application

$$\begin{array}{rccc} f_{a,b} : & D & \longrightarrow & D \\ & z & \longmapsto & \dfrac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}} \end{array}$$

où a et b sont deux nombres complexes tels que $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

1) Montrer que l'application $f_{a,b}$ est bien définie sur D (*i. e.* qu'elle n'a pas de pôle dans D).

Rép.– En effet $\left|-\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right| < 1$ entraîne $|\overline{a}|^2 < |\overline{b}|^2$ soit encore $|a|^2 - |b|^2 < 0$. Or, par hypothèse, $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

2) Montrer que pour tout $z \in D$ on a

$$|f(z)|^2 < 1.$$

En déduire que l'application $f_{a,b}$ préserve bien D *i. e.* $f_{a,b}(D) \subset D$.

Rép.– On a

$$|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)} = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}.\frac{\overline{a}\overline{z}+\overline{b}}{b\overline{z}+a} = \frac{|a|^2|z|^2+|b|^2+(\overline{a}b\overline{z}+a\overline{b}z)}{|b|^2|z|^2+|a|^2+(\overline{a}b\overline{z}+a\overline{b}z)}$$

or $|a|^2 = 1 + |b|^2$ ainsi

$$|f(z)|^2 = \frac{|b|^2|z|^2+|z|^2+|b|^2+(\overline{a}b\overline{z}+a\overline{b}z)}{|b|^2|z|^2+1+|b|^2+(\overline{a}b\overline{z}+a\overline{b}z)}$$

et puisque $|z|^2 < 1$ on obtient $|f(z)|^2 < 1$.

3) Montrer que l'on a $f_{a,b}(D) = D$ et que $f_{a,b}$ est bijective. Déterminer l'inverse de $f_{a,b}$.

Rép.– Soit $w \in D$. Un simple calcul montre que

$$\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}} = w \iff z = \frac{\overline{a}w-b}{-\overline{b}w+a}.$$

Ainsi $z := f_{\overline{a},-b}(w) \in D$ est tel que $f_{a,b}(z) = w$. Par conséquent $f_{a,b}(D) = D$. Le calcul que l'on vient d'effectuer montre que $f_{a,b}$ est bijective d'inverse $f_{\overline{a},-b}$.

4) Montrer que $f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{A,B}$ pour un certain couple $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ que l'on déterminera. Montrer aussi que $|A|^2 - |B|^2 = 1$.

Rép.– Un calcul direct montre que $A = ac + b\overline{d}$ et $B = ad + b\overline{c}$. Ce calcul est facilité si on se souvient de son cours : $f_{a,b}$ est la restriction sur D d'une homographie dont la forme matricielle est

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

et la composée des homographies revient à multiplier les matrices. De même $|A|^2 - |B|^2$ est un déterminant et la propriété de multiplicativité du déterminant permet d'écrire $|A|^2 - |B|^2 = (|a|^2 - |b|^2)(|c|^2 - |d|^2) = 1$.

5) Soient O l'origine de $\mathbb{C}$ et w un point quelconque de D. Montrer qu'il existe $f_{a,b}$ telle que $f_{a,b}(O) = w$. En déduire que pour tout couple (z, w) de points de D, il existe $f_{a,b}$ telle que $f_{a,b}(z) = w$.

Rép.– On cherche a et b tels que

$$w = f_{a,b}(O) = \frac{b}{\overline{a}} \quad \text{et} \quad |a|^2 = 1 + |b|^2.$$

Choisissons $b = \overline{a}w$. On a alors $1 + |b|^2 = 1 + |a|^2|w|^2$ et le nombre a doit être choisi tel que $|a|^2 = 1 + |a|^2|w|^2$, c'est-à-dire $|a|^2 = \frac{1}{1-|w|^2}$. En fin de compte, le couple $(a, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-|w|^2}}, \frac{w}{\sqrt{1-|w|^2}}\right)$ convient. Soient maintenant $f_{a,b}$ et $f_{c,d}$ telles que $f_{a,b}(O) = w$ et $f_{c,d}(O) = z$. Ainsi $f_{c,d}^{-1}(z) = f_{\overline{c},-d}(z) = O$ et donc $f_{a,b} \circ f_{\overline{c},-d}(z) = w$. D'après la question précédente, cette composée $f_{a,b} \circ f_{\overline{c},-d}$ est de la forme $f_{A,B}$ avec $|A|^2 - |B|^2 = 1$.

6) Montrer que le développement limité à l'ordre 1 par rapport à u de $f_{a,b}$ s'écrit au point $z \in D$:

$$f_{a,b}(z + u) = f_{a,b}(z) + \frac{u}{(\overline{b}z + \overline{a})^2} + o(|u|).$$

En déduire l'expression de la différentielle $d(f_{a,b})_z(u)$.

Rép.– Ecrivons le développement limité à l'ordre 1 par rapport à u :

$$\begin{aligned}
f_{a,b}(z+u) &= \frac{a(z+u)+b}{\overline{b}(z+u)+\overline{a}} \\
&= (a(z+u)+b).(\overline{b}u+\overline{b}z+\overline{a})^{-1} \\
&= \frac{a(z+u)+b}{\overline{b}z+\overline{a}}.\left(1+\frac{\overline{b}}{\overline{b}z+\overline{a}}u\right)^{-1} \\
&= \frac{a(z+u)+b}{\overline{b}z+\overline{a}}.\left(1-\frac{\overline{b}}{\overline{b}z+\overline{a}}u+o(|u|)\right) \\
&= \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}+\frac{au}{\overline{b}z+\overline{a}}-\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}.\frac{\overline{b}}{\overline{b}z+\overline{a}}u+o(|u|) \\
&= \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}+\frac{a(\overline{b}z+\overline{a})u}{(\overline{b}z+\overline{a})^2}-\frac{\overline{b}(az+b)}{(\overline{b}z+\overline{a})^2}u+o(|u|) \\
&= f_{a,b}(z)+\frac{|a|^2-|b|^2}{(\overline{b}z+\overline{a})^2}u+o(|u|) \\
&= f_{a,b}(z)+\frac{1}{(\overline{b}z+\overline{a})^2}u+o(|u|).
\end{aligned}$$

Par conséquent : $d(f_{a,b})_z(u) = \dfrac{u}{(\overline{b}z+\overline{a})^2}$.

7) Montrer que

$$1-|f_{a,b}(z)|^2 = \frac{1-|z|^2}{|(\overline{b}z+\overline{a})^2|}.$$

Rép.– On a

$$\begin{aligned}
1-|f_{a,b}(z)|^2 &= 1-\left|\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right|^2 \\
&= \frac{(\overline{b}z+\overline{a})(b\overline{z}+a)-(az+b)(\overline{a}\overline{z}+\overline{b})}{(\overline{b}z+\overline{a})(b\overline{z}+a)} \\
&= \frac{1-|z|^2}{|\overline{b}z+\overline{a}|^2}
\end{aligned}$$

et bien sûr $|\overline{b}z+\overline{a}|^2 = |(\overline{b}z+\overline{a})^2|$.

8) Pour chaque point $z \in D$ on définit une norme par

$$\|u\|_z = \frac{1}{1-|z|^2}|u| \qquad (u \in \mathbb{C})$$

qui est appelée *norme hyperbolique* de u au point z. On dit qu'une application $f : D \longrightarrow D$ est une *isométrie* pour la norme hyperbolique si

$$\forall z \in D,\ \forall u \in \mathbb{C}, \quad \|df_z(u)\|_{f(z)} = \|u\|_z.$$

Montrer que $f_{a,b}$ est une isométrie pour la norme hyperbolique.

Rép.– On a

$$\begin{aligned}
\|d(f_{a,b})_z(u)\|_{f_{a,b}(z)} &= \frac{1}{1-|f_{a,b}(z)|^2}|d(f_{a,b})_z(u)| \\
&= \frac{|(\bar{b}z+\overline{a})^2|}{1-|z|^2}|d(f_{a,b})_z(u)| \\
&= \frac{|(\bar{b}z+\overline{a})^2|}{1-|z|^2}\left|\frac{u}{(\bar{b}z+\overline{a})^2}\right| \\
&= \frac{|u|}{1-|z|^2} \\
&= \|u\|_z.
\end{aligned}$$

Note.– Le disque D muni de la norme hyperbolique est appelé le *disque de Poincaré*. Il joue un rôle très important en géométrie.