Université Claude Bernard Lyon 1

M1 HPDS EADM – Géométrie

Corrigé de l'examen du 1er décembre 2014

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Décrire géométriquement la similitude plane dont la forme complexe est $f(z) = (1+\sqrt{3}i)\overline{z} - 3 + \sqrt{3}i$.

Rép.– Il s'agit de l'écriture sous forme complexe d'une similitude indirecte. Le rapport est $|1+\sqrt{3}i| = 2 \neq 1$ et un calcul direct montre que le centre est $\omega = 1+\sqrt{3}i$. Son axe fait un angle de $\frac{1}{2}arg(1+\sqrt{3}i) = \pi/6$ avec l'horizontale et il passe par ω. Finalement $f = h_{\omega,2} \circ s_\Delta$.

2.– Écrire l'équation cartésienne de la tangente au point $P = (1,1)$ de la conique euclidienne $C = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 \mid x^2 + y^2 + 6xy - 2x - 2y - 4 = 0\}$.

Rép.– Soient $F(x,y) := x^2 + y^2 + 6xy - 2x - 2y - 4$ et $P = (x_0, y_0) \in C$. D'après le cours, si $(F_x(x_0,y_0), F_y(x_0,y_0)) \neq (0,0)$, C admet une tangente en P dont une équation cartésienne est donnée par

$$(x - x_0)F_x(x_0,y_0) + (y - y_0)F_y(x_0,y_0) = 0.$$

On a $F_x(1,1) = 6$ et $F_y(1,1) = 6$ donc C admet une tangente en $(1,1)$ dont une équation cartésienne est $x + y = 2$.

3.– Le lieu des points $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 6x^2 + 8xy - 6x + 17y + 1 = 0\}$ est-il une ellipse ? Justifier.

Rép.– La forme quadratique à l'infini de $f(x,y) = 6x^2 + 8xy - 6x + 17y + 1$ est $q(x,y) = 6x^2 + 8xy$. Cette forme s'écrit $q(x,y) =^t XQX$ avec

$$Q = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Un calcul montre que les valeurs propres de Q sont 8 et -2. Ainsi, C ne peut être une ellipse.

4.– Soient A, B et M trois points distincts d'un cercle de centre O. Montrer que $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ (égalité de mesures d'angles orientés de vecteurs).

Rép.– Dans le triangle MAO on a

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = \pi \quad [2\pi].$$

Ce triangle est isocèle donc $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) \quad [2\pi]$ d'où

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = \pi \quad [2\pi].$$

Les mêmes considérations dans le triangle MBO conduisent à

$$2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = \pi \quad [2\pi].$$

En sommant

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = 0 \quad [2\pi].$$

5.– Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière,

$$\begin{array}{rccc} S: & [a,b] & \longrightarrow & [0, L] \\ & t & \longrightarrow & S(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du \end{array}$$

son abscisse curviligne et $\varphi : [0, L] \longrightarrow [a, b]$ l'inverse de S. Montrer que $s \longrightarrow \gamma \circ \varphi(s)$ est une courbe paramétrée par la longueur d'arc.

Rép.– Puisque $S \circ \varphi = id$ on a

$$\forall s \in [0, L], \qquad \varphi'(s) = \frac{1}{S'(\varphi(s))} = \frac{1}{\|\gamma'(\varphi(s))\|}.$$

Or

$$(\gamma \circ \varphi)'(s) = \varphi'(s)\gamma'(\varphi(s)) = \frac{\gamma'(\varphi(s))}{\|\gamma'(\varphi(s))\|}.$$

Par conséquent $\|(\gamma \circ \varphi)'(s)\| = 1$ pour tout $s \in [0, L]$.

Le problème. – (10 pts) Soient E un espace affine euclidien de dimension 3 orienté et D_1 et D_2 deux droites de E non coplanaires de vecteur directeur respectif $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ de norme 1. Le but de ce problème est d'étudier les isométries

f de E qui laissent globalement invariant l'union $D_1 \cup D_2$ de ces deux droites.

1) Montrer que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

Rép.– Notons d'abord que $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont linéairement indépendants car dans le cas contraire les droites D_1 et D_2 seraient parallèles et donc coplanaires. Supposons qu'il existe $O \in D_1 \cap D_2$ alors $D_1 = O + vect(\overrightarrow{u_1})$ et $D_2 = O + vect(\overrightarrow{u_2})$. Par conséquent les droites D_1 et D_2 sont incluses dans $P = O + vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$. Contradiction.

2) On note $\overrightarrow{n}$ un vecteur unitaire normal au plan $vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$. On note aussi P_1 (resp. P_2) le plan contenant D_1 (resp. D_2) et dont $\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur.

a) Montrer que $P_1 \cap P_2$ est une droite que l'on notera Δ.

b) Montrer que Δ coupe perpendiculairement les droites D_1 et D_2. On notera H_1 et H_2 les points d'intersection.

Rép.– a) On a $\overrightarrow{P_1 \cap P_2} = Vect(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{u_1}) \cap Vect(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{u_2}) = Vect(\overrightarrow{n})$ car $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont linéairement indépendants. Ainsi $P_1 \cap P_2$ est une droite.

b) On vient de montrer que $\overrightarrow{\Delta} = vect(\overrightarrow{n})$. Or $\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{u_1} \rangle = 0$. Donc les droites $\Delta \subset P_1$ et $D_1 \subset P_1$ ne sont pas parallèles, elles se coupent nécessairement en un point et elles sont perpendiculaires entre elles. Raisonnement similaire pour Δ et D_2.

3) On note G le groupe des isométries de E qui laissent $\{D_1, D_2\}$ invariant. Soit $f \in G$ i.e. telle que

$$f(D_1 \cup D_2) = D_1 \cup D_2.$$

a) Montrer que soit $f(D_1) = D_1$, soit $f(D_1) = D_2$.

b) Montrer que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{n}) = \pm \overrightarrow{n}$.

c) Montrer que soit $f(P_1) = P_1$, soit $f(P_1) = P_2$.

d) Déduire de b. et de c. que $f(\Delta) = \Delta$.

e) Montrer que le milieu I de $[H_1 H_2]$ est un point fixe de f.

Rép.– a) Puisque f est une isométrie de E, c'est application affine bijective. Or l'image par une telle application d'un sous-espace affine de dimension un est un sous-espace affine de dimension 1. Donc ici $f(D_1) = D_1$ ou $f(D_1) = D_2$. Et similairement pour $f(D_2)$.

b) L'application $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle. D'après a. on a

$$f(\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}) = \{\pm \overrightarrow{u_1} \pm \overrightarrow{u_2}\}.$$

Puisque $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan $vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ et que dim $\overrightarrow{E} = 3$ on a néssairement $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{n}) = \pm\overrightarrow{n}$.

c) Si $f(D_1) = D_1$ alors $f(P_1) = P_1$ car $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{n}) = \pm\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{P}_1 = vect(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{u_1})$. Similairement, si $f(D_1) = D_2$ alors $f(P_1) = P_2$.

d) Puisque $\Delta = P_1 \cap P_2$, on a $f(\Delta) = f(P_1) \cap f(P_2) = P_1 \cap P_2 = \Delta$.

e) Puisque $H_1 = D_1 \cap \Delta$ si $f(D_1) = D_1$ alors $f(H_1) = H_1$, et si $f(D_1) = D_2$ alors $f(H_1) = H_2$. Idem pour $f(H_2)$. Comme f conserve les distances, elle doit conserver le milieu I de $[H_1H_2]$.

4) Soit P le plan médiateur du segment $[H_1H_2]$.

a) Montrer que P est stable par f et que la restriction $f_{|P}$ de f à P est une isométrie plane à point fixe.

b) Énoncer le théorème de classification des isométries planes. Déterminer les types d'isométries possibles pour $f_{|P}$.

Rép.– a) Soit $M \in E$. Notons $M' = f(M)$. Puisque f est une isométrie qui conserve $\{H_1, H_2\}$, on a

$$MH_1 = MH_2 \iff M'H_1 = M'H_2.$$

Donc si $M \in P$ alors $M' \in P$, ce qui montre que P est stable par f. En particulier $f_{|P}$ est une isométrie de P. Puisque $I \in P$ et que $f(I) = I$, l'application $f_{|P}$ est une isométrie plane à point fixe.

b) Tout déplacement du plan est soit l'identité, soit une rotation, soit une translation. Tout antidéplacement du plan est soit une réflexion, soit une symétrie glissée. Ici, puisque $f_{|P}$ admet au moins un point fixe I, $f_{|P}$ ne peut-être que l'identité, ou une rotation de centre I ou une réflexion dont l'axe passe par I.

5) On suppose que $f_{|P} = Id_P$. Montrer que $f = Id_E$ (dans le raisonnement, on s'aidera du théorème de classification des isométries de l'espace et on veillera à distinguer le cas où $f(H_1) = H_2$ de celui où $f(H_1) = H_1$).

Rép.– Supposons que $f(H_1) = H_2$ alors, par le théorème de classification des isométries de l'espace, f ne peut être que la réflexion s_P de plan P. L'application f doit aussi envoyer D_1 sur D_2 ce implique que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u_1}) = \pm\overrightarrow{u_2}$. Mais ceci est impossible puisque $\overrightarrow{s_P}$ est l'identité sur $\overrightarrow{P} = vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$. Par conséquent $f(H_1) = H_1$. Comme f fixe P point par point, c'est donc que $f = Id_E$ (f fixe une base affine de E).

6) a) Montrer que le retournement r_0 autour de l'axe Δ est un élément de G.
b) Déterminer la restriction $(r_0)_{|P}$ de r_0 à P.

Rép.– a) On a $D_1 = H_1 + vect(\overrightarrow{u_1})$ et $D_2 = H_2 + vect(\overrightarrow{u_2})$. Puisque le retournement est d'axe Δ et que $H_1, H_2 \in \Delta$, on a $r_0(H_1) = H_1$ et $r_0(H_2) = H_2$. Puisque $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont dans $vect(\overrightarrow{\Delta})^\perp$ (cf. question 2b) on a $\overrightarrow{r_0}(\overrightarrow{u_1}) = -\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{r_0}(\overrightarrow{u_2}) = -\overrightarrow{u_2}$. Ainsi $r_0(D_1) = D_1$ et $r_0(D_2) = D_2$, ce qui montre que $r_0 \in G$.

b) Puisque $\overrightarrow{r_0}(\overrightarrow{u_1}) = -\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{r_0}(\overrightarrow{u_2}) = -\overrightarrow{u_2}$ et que $r_0(I) = I$, la restriction $(r_0)_{|P}$ est une symétrie centrale de centre I.

7) Soient d_1 (resp. d_2) la projection orthogonale de D_1 (resp. D_2) sur P et soient Δ_1 et Δ_2 les droites de P bissectrices du couple (d_1, d_2). On note $\overrightarrow{v_1}$ (resp. $\overrightarrow{v_2}$) un vecteur directeur de norme 1 de Δ_1 (resp. de Δ_2).
a) Montrer que si $f \in G$, alors $f_{|P}(d_1) = d_1$, soit $f_{|P}(d_1) = d_2$.
b) On note r_1 (resp. r_2) le retournement autour de Δ_1 (resp. Δ_2). Écrire la matrice de $\overrightarrow{r_1}$ dans la base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{n})$.
c) Montrer que l'on a $\overrightarrow{r_1}(\overrightarrow{u_1}) = \pm\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{r_1}(\overrightarrow{u_2}) = \pm\overrightarrow{u_1}$.
d) En déduire que r_1 et r_2 sont dans G.

Rép.– a) Évident puisque $d_1 = P_1 \cap P$ et $d_2 = P_2 \cap P$.

b) Puisque $\overrightarrow{r_1}$ est un retournement vectoriel d'axe $\overrightarrow{\Delta_1}$, on a $\overrightarrow{r_1}(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{v_1}$. Puisque $\overrightarrow{r_1}$ est une symétrie centrale sur le plan $\overrightarrow{v_1}^\perp = vect(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{n})$ on a aussi $\overrightarrow{r_1}(\overrightarrow{v_2}) = -\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{r_1}(\overrightarrow{n}) = -\overrightarrow{n}$. D'où la matrice M_1 de $\overrightarrow{r_1}$ dans la base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{n})$:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Puisque $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont de norme 1, il existe $\theta_1 \in \mathbb{R}$ et $\theta_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\overrightarrow{u_1} = \cos\theta_1 \overrightarrow{v_1} + \sin\theta_1 \overrightarrow{v_2} \text{ et } \overrightarrow{u_2} = \cos\theta_2 \overrightarrow{v_1} + \sin\theta_2 \overrightarrow{v_2}$$

Puisque Δ_1 est une bissectrice de (d_1, d_2) on a

$$\theta_2 = -\theta_1 \quad [\pi]$$

Ainsi

$$\overrightarrow{u_2} = \pm(\cos\theta_1 \overrightarrow{v_1} - \sin\theta_1 \overrightarrow{v_2})$$

Or

$$\overrightarrow{r_1}(\overrightarrow{u_1}) = \cos\theta_1 \overrightarrow{v_1} - \sin\theta_1 \overrightarrow{v_2}$$

donc

$$\overrightarrow{r_1}(\overrightarrow{u_1}) = \pm\overrightarrow{u_2}.$$

Un raisonnement similaire montre que $\overrightarrow{r_1}(\overrightarrow{u_2}) = \pm\overrightarrow{u_1}$.

d) On a $r_1(H_1) = H_2$ et $r_1(H_2) = H_1$ puisque r_1 restreinte à $I + vect(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{v_2})$ est une symétrie centrale de centre I. Ainsi $r_1(D_1) = D_2$ et $r_1(D_2) = D_1$, ce qui montre que $r_1 \in G$. Mêmes arguments pour r_2.

8) On note G_+ le groupe engendré par r_1 et r_2.

a) Montrer que G_+ est abélien en déterminant les produits $r_2 \circ r_1$ et $r_1 \circ r_2$.

b) Déterminer $r_1^{k_1} \circ r_2^{k_2}$ où $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$. En déduire que G_+ a quatre éléments.

c) Le groupe G_+ est-il isomorphe à $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$? Justifier.

Rép.– La matrice M_2 de $\overrightarrow{r_2}$ dans la base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{n})$ est :

$$M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices de $\overrightarrow{r_2} \circ \overrightarrow{r_1}$ et $\overrightarrow{r_1} \circ \overrightarrow{r_2}$ sont les produits M_2M_1 et M_1M_2. Or

$$M_1M_2 = M_2M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $r_2 \circ r_1(I) = r_1 \circ r_2(I) = I$ il s'en suit que $r_2 \circ r_1 = r_1 \circ r_2$ est le retournement r_0 d'axe Δ.

b) Puisque $r_0^2 = r_1^2 = r_2^2 = Id$ il est facile de conclure que

$$\begin{array}{ll} r_1^{k_1} \circ r_2^{k_2} = Id & \text{si } k_1 \text{ et } k_2 \text{ sont pairs} \\ r_1^{k_1} \circ r_2^{k_2} = r_1 & \text{si } k_1 \text{ est impair et } k_2 \text{ est pair} \\ r_1^{k_1} \circ r_2^{k_2} = r_2 & \text{si } k_1 \text{ est pair et } k_2 \text{ est impair} \\ r_1^{k_1} \circ r_2^{k_2} = r_0 & \text{si } k_1 \text{ et } k_2 \text{ sont impairs.} \end{array}$$

Le groupe G a donc quatre éléments.

c) Non. Si G_+ était isomorphe au groupe cyclique $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ alors un de ses éléments serait d'ordre 4. Or, excepté le neutre, tous les éléments de G_+ sont d'ordre 2.

9) a) On supppose qu'il existe une isométrie indirecte dans G que l'on note σ. Montrer que G possède alors au moins quatre isométries indirectes.

b) A votre avis, le groupe G possède-t-il une isométrie indirecte ? Justifier. (Attention ! Question sournoise et difficile à ne traiter qu'en dernier...)

Rép.– a) Il s'agit des isométries σ, $\sigma \circ r_0$, $\sigma \circ r_1$ et $\sigma \circ r_2$.
b) La réponse à cette question dépend de l'orthogonalité éventuelle de D_1 et de D_2.

• Si les droites D_1 et D_2 sont orthogonales alors les droites Δ, D_1 et D_2 sont deux à deux orthogonales et la réflexion σ de plan $I + vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{n})$ est telle que $\overrightarrow{\sigma}(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{\sigma}(\overrightarrow{u_2}) = -\overrightarrow{u_2}$. En particulier $\sigma \in G$.

• Si les droites D_1 et D_2 ne sont pas orthogonales alors G ne contient aucune isométrie indirecte. Voici rapidement les arguments. Une telle isométrie indirecte ne peut être qu'une réflexion ou une anti-rotation. Si c'est une réflexion et que de plus $\sigma(D_1) = D_1$, alors on montre aisément que la droite D_1 doit être orthogonale à D_2. Dans l'autre cas, si $\sigma(D_1) = D_2$, on note Π le plan de la réflexion. On montre d'abord que $\Pi \cap D_1 = \emptyset$. On en déduit que $D_1 // \Pi$, donc que $D_1 // \sigma(D_1) = D_2$. D'où une contradiction.

Supposons maintenant que σ est une anti-rotation. Son centre doit être I et son axe Δ. En particulier $\sigma(H_1) = H_2$. On décompose $\sigma = r \circ s_P = s_P \circ r$ où r est une rotation d'axe Δ et s_P la réflexion de plan P. La restriction de σ à P est soit une rotation qui échange d_1 et d_2 soit une symétrie centrale. La première possibilité est exclue car d_1 et d_2 ne sont pas orthogonales. La seconde implique que r est un retournement puis que σ est une symétrie centrale de centre I. Mais alors D_1 et D_2 devraient être parallèles. D'où une contradiction.