Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Corrigé de l'examen du 29 novembre 2018

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{i\theta}\overline{z}$. Montrer que f est une isométrie et déterminer $Fix\ f$.

Rép.– Soient $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. On a

$$|f(z) - f(w)| = |e^{i\theta}\overline{z} - e^{i\theta}\overline{w}| = |e^{i\theta}||\overline{z} - \overline{w}| = |\overline{z - w}| = |z - w|.$$

Ainsi f est une isométrie. Soit $z = \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. On a

$$f(z) = z \iff \rho e^{i\theta - \varphi} = \rho e^{i\varphi} \iff \rho = 0 \text{ ou } \theta = 2\varphi + 2k\pi$$

d'où

$$Fix\ f = \{\rho e^{i\theta/2} \mid \rho \in \mathbb{R}\}.$$

L'ensemble des points fixes est une droite passant par l'origine et faisant un angle de $\theta/2$ avec l'axe des réels.

2.– Soit $\overrightarrow{P}$ un plan orienté, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ une base orthonormée directe et $\overrightarrow{f} \in SO(\overrightarrow{P})$. Montrer que la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

où $\theta \in \mathbb{R}$.

Rép.– Notons

$$Mat_{\mathcal{B}}\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Puisque $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_1)$ est unitaire, on a $a^2+b^2=1$. Puisque $(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_1), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_2))$ est une base orthonormée directe, il faut

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_2) = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

Puisque $a^2+b^2=1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a=\cos\theta$ et $b=\sin\theta$.

3.– Soient $\mathcal{C}$ un cercle du plan P de centre Ω et de rayon R, et A un point de P. La *puissance* $P_{\mathcal{C}}(A)$ *de* A *par rapport à* $\mathcal{C}$ est le nombre $A\Omega^2 - R^2$. Soit D une droite passant par A et coupant $\mathcal{C}$ en deux points (distincts ou confondus) M et M'. Montrer que $\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'} \rangle = P_{\mathcal{C}}(A)$.

Rép.– Soit M'' le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à M'. On a

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'} \rangle &= \langle \overrightarrow{AM''}, \overrightarrow{AM'} \rangle &&= \langle \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M''}, \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M'} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{A\Omega} - \overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M'} \rangle &&= A\Omega^2 - R^2. \end{aligned}$$

4.– Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier inscrit dans le cube $[0,1]^3$. Précisément $A=(1,1,0)$, $B=(1,0,1)$, $C=(0,1,1)$ et $D=(0,0,0)$. Montrer que la hauteur du tétraèdre issue de D est la grande diagonale du cube (DD') où $D'=(1,1,1)$.

Rép.– Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ engendrent le plan (ABC). Un vecteur directeur de (DD') est $\overrightarrow{u}=(1,1,1)$. On a $\overrightarrow{AB}=(0,-1,1)$ et $\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$. Il est immédiat de constater que

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{u} \rangle = 0$$

donc (DD') et (ABC) sont orthogonaux. Ceci suffit à montrer que la hauteur du tétraèdre issue de D est la grande diagonale (DD').

5.– Soient A, B et M trois points distincts d'un cercle de centre O. Montrer que $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \quad [2\pi]$ (égalité de mesures d'angles orientés de vecteurs).

Rép.– Dans le triangle MAO on a

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = \pi \quad [2\pi].$$

Ce triangle est isocèle donc $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) \quad [2\pi]$ d'où

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = \pi \quad [2\pi].$$

Les mêmes considérations dans le triangle MBO conduisent à

$$2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = \pi \quad [2\pi].$$

En sommant
$$2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})=0 \quad [2\pi].$$

Le problème. – (10 pts) Le but de ce problème est de déterminer le groupe d'isométrie de certaines figures géométriques.

QUESTION PRÉLIMINAIRE.– Soient θ_1,θ_2 deux nombres réels. Montrer que
$$e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}=2i\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}.$$

Rép.– On a
$$e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}=e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\left(e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}-e^{-i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}\right)=2i\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}.$$

PARTIE 1.– Soient $p\geq 1$ un entier et $\{(A_0,\lambda_0),...,(A_p,\lambda_p)\}$ un système de $p+1$ points pondérés du plan tel que $\sum_{k=0}^{p}\lambda_k=1$. Le barycentre $G=bar\{(A_0,\lambda_0),...,(A_p,\lambda_p)\}$ d'un tel système est le point G défini par :
$$\sum_{k=0}^{p}\lambda_k\overrightarrow{GA}_k=\overrightarrow{0}.$$

Si $\lambda_0=...=\lambda_p=\frac{1}{p+1}$, on dit que G est l'isobarycentre des points $A_0,...,A_p$.

1) Soit f une application affine du plan. Montrer que f conserve le barycentre c'est-à-dire :
$$G=bar\{(A_0,\lambda_0),...,(A_p,\lambda_p)\} \implies f(G)=bar\{(f(A_0),\lambda_0),...,(f(A_p),\lambda_p)\}.$$

pour tout système de points pondérés $\{(A_0,\lambda_0),...,(A_p,\lambda_p)\}$.

Rép.– On a
$$f(G)=f\left(O+\frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{p}\lambda_i\overrightarrow{OA_i}\right)=f(O)+\overrightarrow{f}\left(\frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{p}\lambda_i\overrightarrow{OA_i}\right)$$

par la relation de Grassmann. D'où par linéarité de $\overrightarrow{f}$
$$f(G)=f(O)+\frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{p}\lambda_i\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OA_i})$$

En écrivant une nouvelle fois les relations de Grassmann $f(A_i) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OA_i})$, on constate que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OA_i}) = \overrightarrow{f(O)f(A_i)}$ d'où

$$f(G) = f(O) + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{p} \lambda_i \overrightarrow{f(O)f(A_i)}.$$

c'est écrire que $f(G) = bar((f(A_0), \lambda_0), ..., (f(A_p), \lambda_p))$.

2) On identifie le plan affine à $\mathbb{C}$ et on note $(a_0, ..., a_p) \in \mathbb{C}^p$ les affixes de $(A_0, ..., A_p)$. Montrer que l'affixe g de G vaut

$$g = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k a_k.$$

Rép.– On a

$$\sum_{k=0}^{p} \lambda_k \overrightarrow{GA_k} = \overrightarrow{0} \iff \sum_{k=0}^{p} \lambda_k(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_k}) = \overrightarrow{0} \iff (\sum_{k=0}^{p} \lambda_k)\overrightarrow{OG} = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k \overrightarrow{OA_k}$$

Puisque $\sum_{k=0}^{p} \lambda_k = 1$ la dernière égalité s'écrit

$$\overrightarrow{OG} = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k \overrightarrow{OA_k}$$

ce qui, en passant aux affixes, est la relation recherchée.

3) Soit $a = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C}^*$ avec $\rho > 0$. On considère les points A_0, A_1 et A_2 dont les affixes respectives sont a, ja et j^2a où j désigne le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$.

i) Calculer les distances A_0A_1, A_0A_2 et A_1A_2 en fonction du module $|a|$. En déduire la nature du triangle formé par les trois points A_0, A_1 et A_2.

ii) Montrer que les points A_0, A_1 et A_2 sont affinement indépendants.

iii) On note O l'origine (le point d'affixe 0) et I le point d'affixe 1. Pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, déterminer une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA_k}})$.

iv) Déterminer l'isobarycentre de A_0, A_1 et A_2.

v) On note $Is(A_0, A_1, A_2)$ le groupe des isométries du plan qui conservent $\{A_0, A_1, A_2\}$. Montrer que tout élément $f \in Is(A_0, A_1, A_2)$ fixe l'origine.

vi) Soit $\Sigma(A_0, A_1, A_2)$ le groupe des permutations des trois points A_0, A_1, A_2 et

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & Is(A_0, A_1, A_2) & \longrightarrow & \Sigma(A_0, A_1, A_2) \\ & f & \longmapsto & f_{|\{A_0, A_1, A_2\}} \end{array}$$

la restriction de f à ces trois points. Montrer que Φ est injective et en déduire que le cardinal de $Is(A_0, A_1, A_2)$ est au plus 6.

vii) Écrire sous forme complexe l'isométrie s de $Is(A_0, A_1, A_2)$ qui fixe A_0 et qui permute A_1 et A_2.

viii) Montrer que Φ est surjective en décrivant six isométries planes conservant $\{A_0, A_1, A_2\}$.

Rép.– i) On a

$$A_0A_1 = |ja - a| = |e^{2i\pi/3} - 1||a| = |e^{i\pi/3}(e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3})||a| = 2\sin(\pi/3)|a| = \sqrt{3}|a|.$$

Puis

$$A_0A_2 = |e^{4i\pi/3} - 1||a| = 2\sin(2\pi/3)|a| = \sqrt{3}|a|.$$

Enfin

$$A_1A_2 = |j^2a - ja| = |j||ja - a| = |ja - a| = A_0A_1 = \sqrt{3}|a|.$$

Les trois distances sont égales, le triangle formé par les points A_0, A_1 et A_2 est donc équilatéral.
ii) Il faut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}$ et $\overrightarrow{A_0A_2}$ forment une base et pour cela il suffit de montrer que $\overrightarrow{A_0A_2}$ n'est pas proportionnel à $\overrightarrow{A_0A_1}$. Ceci revient à montrer que leurs affixes $a_1 - a_0 = a(j - 1)$ et $a_2 - a_0 = a(j^2 - 1)$ ne sont pas multiples l'une de l'autre par un facteur réel. Or un calcul montre que

$$a_2 - a_0 = a(j^2 - 1) = -j^2a(j - 1) = -j^2(a_1 - a_0).$$

Le coefficient de proportionalité n'est pas un réel pur, donc $\overrightarrow{A_0A_1}$ et $\overrightarrow{A_0A_2}$ sont linéairement indépendants.
iii) Une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA_k}})$ est donnée par un argument du nombre complexe

$$\frac{a_k - 0}{1 - 0} = a_k = \rho e^{i(\varphi + 2k\pi/3)}$$

par exemple $\varphi + 2k\pi/3$.
iv) D'après la question 2) l'affixe g de l'isobarycentre est donnée par

$$g = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2} j^k a = \frac{a}{3}\sum_{k=0}^{2} j^k = \frac{a}{3}\frac{1 - j^3}{1 - j} = 0.$$

L'isobarycentre est donc l'origine.
v) Une isométrie est une application affine. D'après la question 1), si O est l'isobarycentre de $\{A_0, A_1, A_2\}$, alors $f(O)$ est l'isobarycentre de $\{f(A_0), f(A_1), f(A_2)\}$. Comme $\{A_0, A_1, A_2\} = \{f(A_0), f(A_1), f(A_2)\}$, on en déduit $f(O) = O$. Ainsi f fixe O.
vi) Soient f et g telles que $f_{|\{A_0,A_1,A_2\}} = g_{|\{A_0,A_1,A_2\}}$. Puisqu'une application affine du plan est déterminée par l'image trois points affinement indépendants, si deux applications affines du plan coïncident sur trois points affinement indépendants alors elles sont égales.

Or $\{A_0, A_1, A_2\}$ sont affinement indépendants. Par conséquent $f = g$ et Φ est injective. Le cardinal de $\Sigma(A_0, A_1, A_2)$ vaut $3\,!$=6. On en déduit que le cardinal de $Is(A_0, A_1, A_2)$ est au plus 6.
vii) Il s'agit d'écrire sous forme complexe la réflexion d'axe (OA_0). Puisque la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA_0}})$ est φ, son expression analytique est la suivante

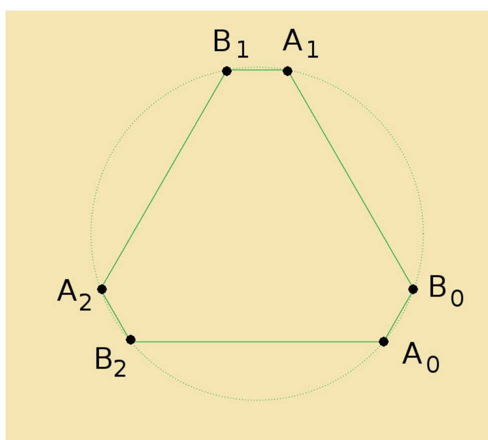
$$s(z) = e^{2i\varphi}\overline{z}.$$

viii) Soit $r(z) = e^{2i\pi/3}z$ la rotation d'angle $2\pi/3$ et de centre O. Les applications $Id, r, r^2, s, s\circ r, s\circ r^2$ sont six isométries qui conservent $\{A_0, A_1, A_2\}$.

Partie 2.– Soient $\alpha \in]0, \frac{\pi}{3}[$, $a = e^{-i(\alpha/2+\pi/6)}$ et $b = e^{i(\alpha/2-\pi/6)}$. On note A_0, A_1, A_2 (resp. B_0, B_1, B_2) les points d'affixe

$$a_k = j^k a \quad \text{(resp.} \quad b_k = j^k b)$$

avec $k \in \{0, 1, 2\}$. On note $H_\alpha = A_0B_0A_1B_1A_2B_2$ l'hexagone constitué par l'union des six segments $[A_k, B_k]$ et $[B_k, A_{k+1}]$, $k \in \{0, 1, 2\}$. On convient d'une convention circulaire des indices : $A_3 = A_0$ et $B_3 = B_0$. Le but de cette partie est déterminer le groupe G des isométries du plan qui préservent l'hexagone H_α.



L'hexagone H_α

1) i) Montrer que O (le point d'affixe 0) est l'isobarycentre des points A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2.
ii) Énoncer le théorème de classification des isométries planes.

iii) On admet[1] que si $g \in G$ alors g fixe O. Déduire du théorème de classification des isométries planes que g est soit l'identité, soit une rotation ou une réflexion par rapport à une droite.

Rép.– i) On a

$$g = \sum_{k=0}^{2} a_k + \sum_{k=0}^{2} b_k = a \sum_{k=0}^{2} j^k + b \sum_{k=0}^{2} j^k = (a+b)(1+j+j^2) = 0.$$

ii) et iii) Le théorème de classification des isométries planes énonce qu'un déplacement du plan est soit l'identité, soit une rotation ou une translation et qu'un antidéplacement du plan est soit une réflexion, soit une symétrie glissée. Les seules isométries qui admettent au moins un point fixe sont les rotations, les réflexions et l'identité.

2) Soit $t \in [0,1]$ et θ_1, θ_2 deux nombres réels tels que $\theta_1 \not\equiv \theta_2 \mod 2\pi$.

i) Montrer que

$$|te^{i\theta_1} + (1-t)e^{i\theta_2}|^2 = 1 + 2t(1-t)(\cos(\theta_1 - \theta_2) - 1).$$

ii) En déduire que $|te^{i\theta_1} + (1-t)e^{i\theta_2}| \leq 1$ avec égalité si et seulement si $t = 0$ ou $t = 1$.

Rép.– i) On a

$$\begin{aligned}
|te^{i\theta_1} + (1-t)e^{i\theta_2}|^2 &= (te^{i\theta_1} + (1-t)e^{i\theta_2})(te^{-i\theta_1} + (1-t)e^{-i\theta_2}) \\
&= t^2 + (1-t)^2 + (1-t)t(e^{i(\theta_2-\theta_1)} + e^{-i(\theta_2-\theta_1)}) \\
&= 1 - 2t + 2t^2 + 2(1-t)t\cos(\theta_2 - \theta_1) \\
&= 1 - 2(1-t)t + 2(1-t)t\cos(\theta_2 - \theta_1) \\
&= 1 + 2(1-t)t(\cos(\theta_2 - \theta_1) - 1)
\end{aligned}$$

ii) D'une part, $\cos(\theta_2 - \theta_1) - 1 < 0$ car $\theta_1 \not\equiv \theta_2 \mod 2\pi$. D'autre part, puisque $t \in [0,1]$, on a $(1-t)t \geq 0$ avec égalité si et seulement si $t = 0$ ou 1.

3) On considère l'application *distance à l'origine* :

$$\begin{array}{rlcl}
d: & H_\alpha & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\
 & Z & \longmapsto & d(Z) = dist(Z, O).
\end{array}$$

i) Montrer que $d(Z) \leq 1$ avec l'égalité si et seulement si le point Z est l'un des six sommets de H_α.

1. Ceci ne découle pas de la question 1) de la première partie car H_α est composé d'une infinité de points : les six sommets et les six arêtes.

Indication.– On rappelle que si Z est sur un segment $[S_1, S_2]$ alors il existe $0 \leq t \leq 1$ tel que l'affixe z de Z vérifie $z = te^{i\theta_1} + (1-t)e^{i\theta_2}$ où $e^{i\theta_1}$ et $e^{i\theta_2}$ sont les affixes des sommets S_1 et S_2.

ii) Déduire de la question 2) que l'image d'un sommet de H_α par g est un sommet de H_α.

Rép.– i) Il est clair que $d(Z) = 1$ si Z est l'un des sommets $A_0, ..., B_3$ car les affixes de chacun de ces points sont des nombres complexes de la forme $e^{i\theta}$ donc de module 1. Si Z est un point qui n'est pas un sommet, il est nécessairement un point intérieur d'une arête et son affixe z s'écrit sous la forme

$$z = te^{i\theta_1} + (1-t)e^{i\theta_2}$$

où $e^{i\theta_1}$ et $e^{i\theta_2}$ sont les affixes des sommets à l'extrémité de l'arête et où $0 < t < 1$. La distance à l'origine de P est donc le module $|z|$. D'après le calcul effectué à la question précédente, $|z| < 1$.
ii) Puisque g est une isométrie et que g fixe O, on a pour tout point Z du plan

$$dist(O, g(Z)) = dist(O, Z).$$

D'après la question précédente, un point Z de H_α est un sommet si et seulement si $dist(O, Z) = 1$. Pour un sommet on a donc $dist(O, g(Z)) = dist(O, Z) = 1$ et $g(Z)$ est donc encore un sommet.

4) i) Montrer que toutes les distances $dist(A_k, B_k)$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$ sont égales. Montrer qu'il en est de même pour les distances $dist(B_k, A_{k+1})$, $k \in \{0, 1, 2\}$.

ii) On note $d_1 = dist(A_0, B_0)$ et $d_2 = dist(B_2, A_0)$. Montrer que $d_1 \neq d_2$.

iii) En déduire que l'image par g des deux points A_0, B_0 est soit $\{A_0, B_0\}$, soit $\{A_1, B_1\}$, soit $\{A_2, B_2\}$.

Rép.– i) On a

$$d(A_k, B_k) = |a_k - b_k| = |j^k a - j^k b| = |j^k||a - b| = |a - b|.$$

Ainsi $d(A_k, B_k)$ est indépendant de k ce qui implique que toutes les distances $d(A_k, B_k)$ sont égales. De même

$$d(B_k, A_{k+1}) = |b_k - a_{k+1}| = |j^k b - j^{k+1} a| = |b - ja|$$

et toutes les distances $d(B_k, A_{k+1})$ sont égales.
ii) Rappelons que $\alpha \in]0, \pi/3[$. On a

$$d_1 = |a - b| = |e^{-i(\alpha/2+\pi/6)} - e^{i(\alpha/2-\pi/6)}| = |-2i\sin(\alpha/2)e^{-i\pi/6}| = 2\sin(\alpha/2)$$

et

$$d_2 = |b - ja| = |e^{i(\alpha/2-\pi/6)} - e^{i(-\alpha/2-\pi/6+2\pi/3)}| = |e^{i(\alpha/2-\pi/6)} - e^{i(-\alpha/2+\pi/2)}|$$

d'où

$$d_2 = |2i\sin(\alpha/2-\pi/3)e^{i\pi/6}| = 2\sin(\pi/3-\alpha/2).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} d_1 = d_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sin(\alpha/2) = \sin(\pi/3-\alpha/2) \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha/2 = \pi/3 - \alpha/2 + 2n\pi \\ \text{ou} \\ \pi - \alpha/2 = \pi/3 - \alpha/2 + 2n\pi \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \pi/3 + 2n\pi \\ \text{ou} \\ \pi = \pi/3 + 2n\pi \end{cases} \end{aligned}$$

avec $n \in \mathbb{Z}$. Ce système n'a aucune solution dans $]0, \pi/3[$, ainsi $d_1 \neq d_2$ pour tout $\alpha \in]0, \pi/3[$.
iii) Le caractère isométrique de g assure que

$$d_1 = dist(A_0, B_0) = dist(g(A_0), g(B_0)).$$

Puisque l'image d'un sommet est un sommet et que $d_2 \neq d_1$, les points $g(A_0)$ et $g(B_0)$ ne peuvent être que les extrémités d'un des trois segments de longueur d_1, autrement dit l'ensemble $\{g(A_0), g(B_0)\}$ ne peut être que $\{A_0, B_0\}$, $\{A_1, B_1\}$ ou $\{A_2, B_2\}$.

5) Déduire du 4) que le cardinal de G est au plus 6.

Rép.– L'isométrie g est entièrement déterminée par l'image de trois points. Puisque $g(O) = O$, il suffit de connaître $g(A_0)$ et $g(B_0)$ pour déterminer complètement g. D'après la question précédente, il n'y a que six possibilités :

$$g(A_0) = A_0, g(B_0) = B_0 \quad \text{ou} \quad g(A_0) = B_0, g(B_0) = A_0$$

ou

$$g(A_0) = A_1, g(B_0) = B_1 \quad \text{ou} \quad g(A_0) = B_1, g(B_0) = A_1$$

ou

$$g(A_0) = A_2, g(B_0) = B_2 \quad \text{ou} \quad g(A_0) = B_2, g(B_0) = A_2.$$

6) i) Écrire l'expression sous forme complexe de la rotation r qui envoie A_0 sur A_1 et montrer qu'elle préserve H_α.
ii) Soit σ la reflexion $\sigma(z) = e^{-i\pi/3}\overline{z}$. Montrer qu'elle préserve H_α.
iii) Décrire tous les éléments de G.

Rép.– i) Soit $r(z) = e^{2i\pi/3}z = jz$ On vérifie sans peine que $r(a_k) = a_{k+1}$ et $r(b_k) = b_{k+1}$.
ii) On a

$$\sigma(a_k) = \sigma(j^k e^{-i(\alpha/2+\pi/6)}) = e^{-i\pi/3}\bar{j}^k e^{i(\alpha/2+\pi/6)} = \bar{j}^k e^{i(\alpha/2-\pi/6)}$$

Ainsi

- Si $k = 0$ alors $\sigma(a_0) = e^{i(\alpha/2-\pi/6)} = b_0$
- Si $k = 1$ alors $\sigma(a_1) = j^2 e^{i(\alpha/2-\pi/6)} = b_2$
- Si $k = 2$ alors $\sigma(a_2) = je^{i(\alpha/2-\pi/6)} = b_1$

Puisque σ est une involution, ceci suffit à montrer que l'hexagone H_α est préservé par σ.
iii) On déduit de i) et de ii) que id, r, r^2, σ, $\sigma \circ r$ et $\sigma \circ r^2$ préservent H_α. On vérifie facilement que ces six isométries sont toutes différentes. Puisque le cardinal de G est au plus six, on vient de décrire tous les éléments de G et on a montré au passage que le cardinal de G est 6 précisément.