Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Examen du 7 janvier 2020 - durée 2h30

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Soit $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \longrightarrow \overrightarrow{E}$ une application orthogonale et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ une base orthonormée. On note M la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que l'on a ${}^tMM = Id$.

2.– On note $A = (0,0,0)$ l'origine et on considère les points $B = (1,0,0)$, $C = (0,1,0)$, $D = (0,0,1)$ et $A' = (1,1,1)$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AA') avec le plan (BCD).

3.– Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ un repère orthonormé. On considère la conique $\mathcal{C}$ d'équation

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$$

dans ce repère. Montrer que $\mathcal{C}$ est une ellipse dont on déterminera les directions principales et la valeur des demi-axes a et b.

4.– Soient $a > 0$ et

$$\begin{array}{rccc} \delta : & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (a\cos t, a(t + \sin t)). \end{array}$$

Montrer que δ est régulière sur $[0, \pi[\cup]\pi, 2\pi]$ et qu'elle présente en $t = \pi$ un point de rebroussement de première espèce.

5.– Soit S la sphère de centre l'origine et de rayon 1. On note $M(u,v)$ le point de S tel que $\overrightarrow{OM}(u,v)$ fasse un angle u avec la verticale et tel que $\overrightarrow{OH}(u,v)$ fasse un angle v par rapport à la droite (Ox), où $H(u,v)$ est le projeté de $M(u,v)$ sur le plan horizontal (Oxy). Donner l'expression analytique de $M(u,v)$ en fonction de u et v puis montrer que la paramétrisation

$$\begin{array}{rccc} M : &]0, \pi[\times [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & M(u,v) \end{array}$$

est régulière.

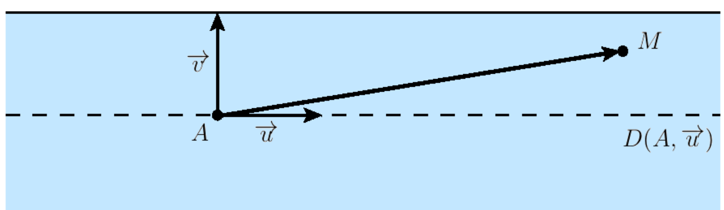
Le problème. – (10 pts) On note $P = (\mathbb{R}^2, \langle ., . \rangle)$ le plan affine euclidien, $\overrightarrow{P}$ son espace vectoriel associé. Le but de ce problème est l'étude des isométries préservant une frise.

Première partie : Bandes du plan

Soit $A \in P$, $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{P}$ un vecteur unitaire et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{v}$. On note $D(A, \overrightarrow{u})$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Le sous-ensemble

$$B(A, \overrightarrow{v}) = \{M \in P \,|\, \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v} \rangle \in [-1, 1]\}$$

est appelé la *bande du plan* d'axe $D(A, \overrightarrow{u})$ et d'épaisseur 2.



1) a) Montrer que tout point de la forme $M = A + \lambda\overrightarrow{u}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est dans $B(A, \overrightarrow{v})$. En déduire que $D(A, \overrightarrow{u}) \subset B(A, \overrightarrow{v})$.
b) Soit $A' \in D(A, \overrightarrow{u})$. Montrer que $\langle \overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v} \rangle$ et en déduire que $B(A', \overrightarrow{v}) = B(A, \overrightarrow{v})$.
c) Montrer que $B(A, \overrightarrow{v}) = B(A, -\overrightarrow{v})$.
d) En déduire que si $\overrightarrow{w} = \pm\overrightarrow{v}$ et si $A' \in D(A, \overrightarrow{u})$ alors $B(A', \overrightarrow{w}) = B(A, \overrightarrow{v})$.

Soient A' un point quelconque et $\overrightarrow{w}$ un vecteur unitaire. On note α et β ses coordonnées dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, autrement dit $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.

2) On suppose $\alpha \neq 0$.
a) Soit $M = A + \lambda\overrightarrow{u}$ un point de $D(A, \overrightarrow{u})$. Montrer que si λ est suffisamment grand alors $\langle \overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{w} \rangle \notin [-1, 1]$.
b) En déduire que si $\alpha \neq 0$ alors $B(A, \overrightarrow{v}) \neq B(A', \overrightarrow{w})$.

3) On suppose $\alpha = 0$ et donc $\beta = \pm 1$ puisque $\overrightarrow{w}$ est unitaire. On note λ et μ les coordonnées de $\overrightarrow{AA'}$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ i. e. $\overrightarrow{AA'} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.

On suppose en outre que $A' \notin D(A, \overrightarrow{u})$ i.e. $\mu \neq 0$ et on considère le point $M = A - \frac{\mu}{|\mu|}\overrightarrow{v}$.

a) Montrer que $M \in B(A, \overrightarrow{v})$.

b) Montrer que $M \notin B(A', \overrightarrow{w})$.

4) Déduire des questions précédentes que

$$B(A, \overrightarrow{v}) = B(A', \overrightarrow{w}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overrightarrow{v} = \pm\overrightarrow{w} \ \text{ et } \ A' \in D(A, \overrightarrow{u}).$$

Seconde partie : Isométries de $B(A, \overrightarrow{u})$

5) Soit $f : P \to P$ une isométrie.

a) Montrer que si $M \in B(A, \overrightarrow{v})$ alors $f(M) \in B(f(A), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}))$.

b) Montrer que $f(B(A, \overrightarrow{v})) = B(f(A), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}))$. On considérera l'application réciproque f^{-1} pour établir la réciproque de la question a).

Soit $f : P \to P$ une isométrie laissant $B(a, \overrightarrow{v})$ stable i.e.

$$f(B(A, \overrightarrow{v})) = B(A, \overrightarrow{v}).$$

6) a) Montrer que $\overrightarrow{v}$ est vecteur propre de $\overrightarrow{f}$ pour la valeur propre 1 ou -1.

b) En déduire que $\overrightarrow{u}$ est vecteur propre de $\overrightarrow{f}$ pour la valeur propre 1 ou -1.

c) On note $s_{\overrightarrow{u}}$ (resp. $s_{\overrightarrow{v}}$) la réflection vectorielle par rapport à $Vect(\overrightarrow{u})$ (resp. $Vect(\overrightarrow{v})$). Montrer que $\overrightarrow{f}$ est soit $\pm\overrightarrow{Id}$, soit $s_{\overrightarrow{u}}$, soit $s_{\overrightarrow{v}}$.

7) a) On suppose que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{Id}$. Montrer que f est une translation dont le vecteur est proportionnel à $\overrightarrow{u}$.

b) On suppose que $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{Id}$. Montrer que $Fix\ f$ est réduit à un point situé sur $D(A, \overrightarrow{u})$. En déduire la nature de f.

8) a) On suppose que $\overrightarrow{f} = s_{\overrightarrow{u}}$. Montrer que $Fix\ f$ est soit la droite $D(A, \overrightarrow{u})$ soit le vide. En déduire la nature de f. *Indication* : on pourra écrire la relation de Grassmann en posant $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

b) On suppose enfin que $\overrightarrow{f} = s_{\overrightarrow{v}}$. Montrer que $Fix\ f$ est une droite dirigée par $\overrightarrow{v}$ et en déduire la nature de f.

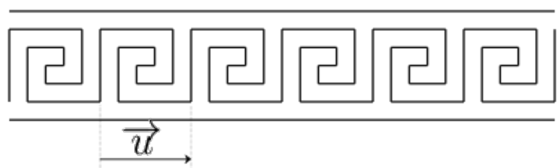
Troisième partie : Groupe de frise

On appelle *frise* un sous-ensemble $F \subset B(A, \overrightarrow{u})$ tel que

i) F est invariant par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ i.e. $t_{\overrightarrow{u}}(F) = F$.

ii) Si F est invariant par une translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$. On dit que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur minimal de la frise.

Étant donnée une frise, on s'intéresse au groupe des isométries du plan qui laissent $B(A, \overrightarrow{u})$ et F invariantes. On le note $G(F)$. Par définition $G(F)$ contient le sous groupe des translations $T = \{t_{k\overrightarrow{u}} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.



Une frise et son vecteur minimal

9) Soit f une symétrie glissée d'axe $D(A, \overrightarrow{u})$ et de translation $t_{\lambda\overrightarrow{u}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $f \circ f = t_{2\lambda\overrightarrow{u}}$.

b) On suppose que $f \in G(F)$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda = \frac{k}{2}$.

10) On note (x, y) les coordonnées de M dans le repère affine $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et s_b (resp. s_c) la réflexion par rapport à la droite $\{x = b\}$ (resp. $\{x = c\}$).

a) Montrer que $s_c \circ s_b = t_{2(c-b)\overrightarrow{u}}$. En déduire que $s_c = t_{2(c-b)\overrightarrow{u}} \circ s_b$.

b) On suppose que $G(F)$ contient une réflexion s_b par rapport à la droite $\{x = b\}$. Montrer que $G(F)$ contient toutes les réflexions $s_{b+k/2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) On suppose qu'il existe b et c dans $\mathbb{R}$ tels que s_b et s_c sont dans $G(F)$. Montrer que nécessairement $c = b + \frac{k}{2}$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

11) Soient σ_B et σ_C deux symétries centrales de centre $B = (b, 0)$ et $C = (c, 0)$ tous les deux sur $D(A, \overrightarrow{u})$.

a) Montrer que $\sigma_C \circ \sigma_B = t_{2\overrightarrow{BC}}$.

b) On suppose σ_B et σ_C appartiennent à $G(F)$ montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\sigma_C = t_{(b+k/2)\overrightarrow{u}} \circ \sigma_B$

12) Déduire des questions précédentes que $G(F)$ est engendré par $t_{\overrightarrow{u}}$ et, lorsqu'ils existent, par une réflexion d'axe dirigée par $\overrightarrow{v}$, une réflexion d'axe dirigée par $\overrightarrow{u}$, une symétrie centrale dont le centre est sur $D(A, \overrightarrow{u})$ et une symétrie glissée d'axe $D(A, \overrightarrow{u})$.