Université Claude Bernard Lyon 1

# M1 MEEF – Géométrie

## Corrigé de l'examen du 7 janvier 2020

*Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.*

**Les questions. –** Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

**1.–** Soit $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \longrightarrow \overrightarrow{E}$ une application orthogonale et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ une base orthonormée. On note $M$ la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que l'on a ${}^tMM = Id$.

**Rép.–** Puisque $\overrightarrow{f}$ est orthogonale :

$$\forall (\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) \in \overrightarrow{E} \times \overrightarrow{E}, \quad \langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{X}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{Y}) \rangle = \langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \rangle.$$

On note $X$ (resp. $Y$) la matrice $(n, 1)$ de $\overrightarrow{X}$ (resp. de $\overrightarrow{Y}$) dans $\mathcal{B}$ ; autrement dit la colonne des coordonnées de $\overrightarrow{X}$ (resp. de $\overrightarrow{Y}$). On a

$$\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \rangle =^t X.Y \quad \text{et} \quad \langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{X}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{Y}) \rangle =^t (MX).MY$$

Or ${}^t(MX) =^t X.{}^tM$ d'où ${}^t(MX).MY =^t X.({}^tM.M).Y$.. Puisque $\overrightarrow{f}$ est une application orthogonale on a

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad {}^tX.({}^tM.M).Y =^t X.Y$$

Notons $A = (a_{ij})$ la matrice ${}^tM.M$. L'évaluation de l'égalité ci dessus avec $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{e}_i$, $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{e}_j$ donne

$$a_{ij} = \delta_{ij}$$

où $\delta_{ij}$ est le symbole de Kronecker. Ainsi $A$ est la matrice identité.

**2.–** On note $A = (0, 0, 0)$ l'origine et on considère les points $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 0)$, $D = (0, 0, 1)$ et $A' = (1, 1, 1)$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite $(AA')$ avec le plan $(BCD)$.

**Rép.–** Déterminons d'abord une équation cartésienne du plan $(BCD)$. Une normale à $(BCD)$ est donnée par

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (1, 1, 1).$$

Un point $M = (x, y, z)$ appartient à $(BCD)$ si et seulement si

$$\langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} \rangle = 0.$$

Or $\overrightarrow{BM} = (x - 1, y, z)$, une équation cartésienne de $(BCD)$ est donc

$$x + y + z = 1.$$

Une équation paramétrique de la droite $(AA')$ est donnée par

$$\lambda \longmapsto (\lambda, \lambda, \lambda).$$

Ainsi $M \in (AA') \cap (BCD) \iff 3\lambda = 1$. Au bilan, le point d'intersection a pour coordonnées $(1/3, 1/3, 1/3)$.

**3.–** Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ un repère orthonormé. On considère la conique $\mathcal{C}$ d'équation

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$$

dans ce repère. Montrer que $\mathcal{C}$ est une ellipse dont on déterminera les directions principales et la valeur des demi-axes $a$ et $b$.

**Rép.–** On note

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

la matrice de la forme quadratique à l'infini dans le repère $\mathcal{R}$. Le calcul du polynôme caractéristique est le suivant :

$$P_Q(\lambda) = det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & -3 \\ -3 & 5 - \lambda \end{pmatrix} = (5 - \lambda)^2 - 9 = 16 - 10\lambda + \lambda^2 = (\lambda - 2)(\lambda - 8)$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 8$ donc $\mathcal{C}$ est une ellipse. On vérifie ensuite que les espaces propres $E_1$ et $E_2$ associés aux valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont

$$E_1 = vect(\overrightarrow{\epsilon}_1) \quad \text{et} \quad E_2 = vect(\overrightarrow{\epsilon}_2)$$

avec avec

$$\overrightarrow{\epsilon}_1 = \frac{\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\epsilon}_2 = \frac{\overrightarrow{e}_2 - \overrightarrow{e}_1}{\sqrt{2}}$$

Notons $(X, Y)$ les coordonnées dans $\mathcal{R}_1 = (O, \overrightarrow{\epsilon}_1, \overrightarrow{\epsilon}_2)$. L'équation

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$$

s'écrit dans ce repère

$$2X^2 + 8Y^2 = 8$$

soit encore

$$\frac{X^2}{2^2} + Y^2 = 1.$$

Il s'agit donc d'une ellipse de directions données par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ et de demi-axes $a = 2$ et $b = 1$.

**4.–** Soient $a > 0$ et

$$\begin{array}{rccc} \delta : & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (a \cos t, a(t + \sin t)). \end{array}$$

Montrer que $\delta$ est régulière sur $[0, \pi[ \cup ]\pi, 2\pi]$ et qu'elle présente en $t = \pi$ un point de rebroussement de première espèce.

**Rép.**– On a

$$\begin{array}{rcl} \|\delta'(t)\|^2 & = & (-a \sin t)^2 + (a(1 + \cos t))^2 \\ & = & 2a^2(1 + \cos t) \end{array}$$

Ainsi $\|\delta'(t)\|^2 = 0$ ssi $t = \pi$. On pose $u = t - \pi$ et on effectue un développement limité de $\delta$ en $u = 0$. On obtient

$$\delta(t) = \begin{pmatrix} -a \\ a\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a/2 \\ 0 \end{pmatrix} u^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ a/6 \end{pmatrix} u^3 + o(u^3).$$

Les vecteurs $\begin{pmatrix} a/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ a/6 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants, ainsi $p = 2$ et $q = 3$. La courbe présente donc en $t = \pi$ un point de rebroussement de première espèce.

**5.–** Soit $S$ la sphère de centre l'origine et de rayon 1. On note $M(u, v)$ le point de $S$ tel que $\overrightarrow{OM}(u, v)$ fasse un angle $u$ avec la verticale et tel que $\overrightarrow{OH}(u, v)$ fasse un angle $v$ par rapport à la droite $(Ox)$, où $H(u, v)$ est le projeté de $M(u, v)$ sur le plan horizontal $(Oxy)$. Donner l'expression analytique de $M(u, v)$ en fonction de $u$ et $v$ puis montrer que la paramétrisation

$$\begin{array}{rccc} M : & ]0, \pi[ \times [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & M(u, v) \end{array}$$

est régulière.

**Rép.**– D'après le cours

$$M(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

On a

$$M_u(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u)$$

et

$$M_v(u,v) = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0)$$

d'où

$$M_u \wedge M_v = \sin u \, M(u,v) \quad \text{et} \quad \|M_u \wedge M_v\| = |\sin u|$$

Puisque $\sin u > 0$ si $u \in ]0, \pi[$, on en déduit que $M$ est une paramétrisation régulière.

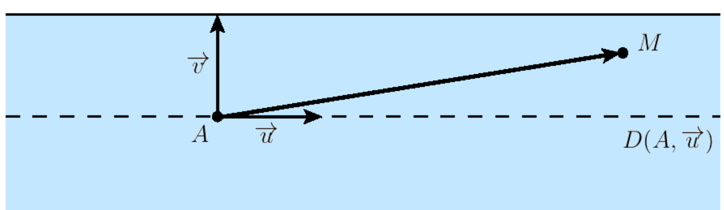
**Le problème.** – (10 pts) On note $P = (\mathbb{R}^2, \langle ., . \rangle)$ le plan affine euclidien, $\overrightarrow{P}$ son espace vectoriel associé. Le but de ce problème est l'étude des isométries préservant une frise.

## Première partie : Bandes du plan

Soit $A \in P$, $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{P}$ un vecteur unitaire et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{v}$. On note $D(A, \overrightarrow{u})$ la droite passant par $A$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Le sous-ensemble

$$B(A, \overrightarrow{v}) = \{M \in P \mid \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v} \rangle \in [-1, 1]\}$$

est appelé la *bande du plan* d'axe $D(A, \overrightarrow{u})$ et d'épaisseur 2.




1) a) Montrer que tout point de la forme $M = A + \lambda \overrightarrow{u}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est dans $B(A, \overrightarrow{v})$. En déduire que $D(A, \overrightarrow{u}) \subset B(A, \overrightarrow{v})$.
b) Soit $A' \in D(A, \overrightarrow{u})$. Montrer que $\langle \overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v} \rangle$ et en déduire que $B(A', \overrightarrow{v}) = B(A, \overrightarrow{v})$.
c) Montrer que $B(A, \overrightarrow{v}) = B(A, -\overrightarrow{v})$.
d) En déduire que si $\overrightarrow{w} = \pm \overrightarrow{v}$ et si $A' \in D(A, \overrightarrow{u})$ alors $B(A', \overrightarrow{w}) = B(A, \overrightarrow{v})$.

**Rép.**– a) Si $M = A + \lambda \overrightarrow{u}$ alors

$$\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \lambda \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0 \in [-1, 1].$$

Ainsi $D(A, \overrightarrow{u}) \subset B(A, \overrightarrow{v})$.
b) Puisque $A' \in D(A, \overrightarrow{u})$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A' = A + \lambda\overrightarrow{u}$ d'où $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{u}$ et

$$\langle \overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{v}\rangle = \langle \overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v}\rangle.$$

c) L'intervalle $[-1, 1]$ étant invariant par $x \mapsto -x$, on a

$$B(A, -\overrightarrow{v}) = \{M \in P \mid \langle \overrightarrow{AM}, -\overrightarrow{v}\rangle \in [-1, 1]\} = \{M \in P \mid \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v}\rangle \in [-1, 1]\} = B(A, \overrightarrow{v}).$$

d) D'après la question b) on a $B(A', \overrightarrow{w}) = B(A, \overrightarrow{w})$, et d'après la question c), $B(A, \overrightarrow{w}) = B(A, \overrightarrow{v})$.

Soient $A'$ un point quelconque et $\overrightarrow{w}$ un vecteur unitaire. On note $\alpha$ et $\beta$ ses coordonnées dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, autrement dit $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.

2) On suppose $\alpha \neq 0$.
a) Soit $M = A + \lambda\overrightarrow{u}$ un point de $D(A, \overrightarrow{u})$. Montrer que si $\lambda$ est suffisamment grand alors $\langle \overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{w}\rangle \notin [-1, 1]$.
b) En déduire que si $\alpha \neq 0$ alors $B(A, \overrightarrow{v}) \neq B(A', \overrightarrow{w})$.

**Rép.**– a) On a

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{w}\rangle &= \langle \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{w}\rangle \\
&= \langle \overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{w}\rangle + \alpha\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}\rangle + \beta\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v}\rangle \\
&= \langle \overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{w}\rangle + \alpha\langle \lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\rangle + \beta\langle \lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle \\
&= \langle \overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{w}\rangle + \alpha\lambda\|\overrightarrow{u}\|^2
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \left(\langle \overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{w}\rangle + \alpha\lambda\|\overrightarrow{u}\|^2\right) = \pm\infty$$

selon le signe de $\alpha$. En particulier, si $\lambda$ est suffisamment grand alors $\langle \overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{w}\rangle \notin [-1, 1]$.
b) D'après la question précédente, la droite $D(A, \overrightarrow{u})$ n'est pas incluse dans $B(A', \overrightarrow{w})$ et donc $B(A, \overrightarrow{v}) \neq B(A', \overrightarrow{w})$.

3) On suppose $\alpha = 0$ et donc $\beta = \pm 1$ puisque $\overrightarrow{w}$ est unitaire. On note $\lambda$ et $\mu$ les coordonnées de $\overrightarrow{AA'}$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ i. e. $\overrightarrow{AA'} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$. On suppose en outre que $A' \notin D(A, \overrightarrow{u})$ i.e. $\mu \neq 0$ et on considère le point $M = A - \frac{\mu}{|\mu|}\overrightarrow{v}$.
a) Montrer que $M \in B(A, \overrightarrow{v})$.

b) Montrer que $M \notin B(A', \overrightarrow{w})$.

**Rép.**– a) On a

$$\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v} \rangle = -\frac{\mu}{|\mu|} \in \{-1, 1\} \subset [-1, 1]$$

donc $M \in B(A, \overrightarrow{v})$.
b) On a

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{w} \rangle &= \langle \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM}, \beta \overrightarrow{v} \rangle \\
&= \langle -\lambda \overrightarrow{u} - \mu \overrightarrow{v}, \beta \overrightarrow{v} \rangle + \beta \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v} \rangle \\
&= 0 - \mu\beta - \beta \frac{\mu}{|\mu|} \\
&= -\beta\mu \left( 1 + \frac{1}{|\mu|} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$|\langle \overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{w} \rangle| = |\mu| \left( 1 + \frac{1}{|\mu|} \right) = |\mu| + 1 > 1.$$

Par conséquent $M \notin B(A', \overrightarrow{w})$.

4) Déduire des questions précédentes que

$$B(A, \overrightarrow{v}) = B(A', \overrightarrow{w}) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{v} = \pm \overrightarrow{w} \ \text{ et } \ A' \in D(A, \overrightarrow{u}).$$

**Rép.**– La question 1) montre l'implication ($\Longleftarrow$). Les questions 2 et 3 la réciproque ($\Longrightarrow$).

## Seconde partie : Isométries de $B(A, \overrightarrow{u})$

5) Soit $f : P \to P$ une isométrie.
a) Montrer que si $M \in B(A, \overrightarrow{v})$ alors $f(M) \in B(f(A), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}))$.
b) Montrer que $f(B(A, \overrightarrow{v})) = B(f(A), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}))$. On considérera l'application réciproque $f^{-1}$ pour établir la réciproque de la question a).

**Rép.**– a) Puisque $f$ est une isométrie, son application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle. Il s'en suit que pour tout $M \in P$ on a

$$\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) \rangle$$

Comme $f$ est affine on a aussi

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{f(A)f(M)}.$$

Au bilan, si $M \in B(A, \overrightarrow{v})$ on a

$$\langle \overrightarrow{f(A)f(M)}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) \rangle = \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v} \rangle \in [-1, 1],$$

c'est-à-dire $f(M) \in B(f(A), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}))$.
b) La question précédente a établi

$$f(B(A, \overrightarrow{v})) \subset B(f(A), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}))$$

il reste à démontrer l'inclusion inverse. Soit $N \in B(f(A), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$. Puisque $f^{-1}$ est encore une isométrie, on a

$$\langle \overrightarrow{f(A)N}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) \rangle = \langle \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{f(A)N}), \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})) \rangle = \langle \overrightarrow{Af^{-1}(N)}, \overrightarrow{v} \rangle$$

Donc, puisque $\overrightarrow{f(A)N}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) \rangle \in [-1, 1]$, on déduit

$$f^{-1}(N) \in B(A, \overrightarrow{v})$$

d'où

$$f^{-1}(B(f(A), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})) \subset B(A, \overrightarrow{v}).$$

En composant par $f$ des deux côtés

$$B(f(A), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})) \subset f(B(A, \overrightarrow{v})).$$

Soit $f : P \to P$ une isométrie laissant $B(a, \overrightarrow{v})$ stable i.e.

$$f(B(A, \overrightarrow{v})) = B(A, \overrightarrow{v}).$$

6) a) Montrer que $\overrightarrow{v}$ est vecteur propre de $\overrightarrow{f}$ pour la valeur propre 1 ou -1.

b) En déduire que $\overrightarrow{u}$ est vecteur propre de $\overrightarrow{f}$ pour la valeur propre 1 ou -1.

c) On note $s_{\overrightarrow{u}}$ (resp. $s_{\overrightarrow{v}}$) la réflection vectorielle par rapport à $Vect(\overrightarrow{u})$ (resp. $Vect(\overrightarrow{v})$). Montrer que $\overrightarrow{f}$ est soit $\pm\overrightarrow{Id}$, soit $s_{\overrightarrow{u}}$, soit $s_{\overrightarrow{v}}$.

**Rép.–** a) Puisque $f(B(A, \overrightarrow{v})) = B(f(A), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}))$ on a

$$f(B(A, \overrightarrow{v})) = B(A, \overrightarrow{v}) \iff \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \pm\overrightarrow{v} \text{ et } f(A) = A + \lambda\overrightarrow{u}$$

ce qui montre en particulier que $\overrightarrow{v}$ est vecteur propre de $\overrightarrow{f}$ pour la valeur propre 1 ou -1.
b) Puisque $\overrightarrow{f}$ est une application orthogonale, $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$ est orthogonal à $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \pm\overrightarrow{v}$. Donc il existe $\alpha$ tel que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \alpha\overrightarrow{u}$ et la préservation de la norme impose $\alpha = \pm 1$.
c) Notons $\lambda_{\overrightarrow{v}} = \pm 1$ et $\lambda_{\overrightarrow{u}} = \pm 1$ les deux valeurs propres de $\overrightarrow{f}$. Si $(\lambda_{\overrightarrow{u}}, \lambda_{\overrightarrow{v}}) = (1, 1)$ alors $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{Id}$; si $(\lambda_{\overrightarrow{u}}, \lambda_{\overrightarrow{v}}) = (-1, -1)$ alors $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{Id}$; si $(\lambda_{\overrightarrow{u}}, \lambda_{\overrightarrow{v}}) = (-1, 1)$ alors

$\overrightarrow{f} = s_{\overrightarrow{v}}$ et si $(\lambda_{\overrightarrow{u}}, \lambda_{\overrightarrow{v}}) = (1, -1)$ alors $\overrightarrow{f} = s_{\overrightarrow{u}}$.

7) a) On suppose que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{Id}$. Montrer que $f$ est une translation dont le vecteur est proportionnel à $\overrightarrow{u}$.
b) On suppose que $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{Id}$. Montrer que $Fix\ f$ est réduit à un point situé sur $D(A, \overrightarrow{u})$. En déduire la nature de $f$.

**Rép.–** a) Puisque $f(B(A, \overrightarrow{v})) = B(f(A), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}))$, il faut nécessairement qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(A) = A + \lambda\overrightarrow{u}$. La relation de Grassmann s'écrit

$$\begin{aligned} f(M) &= f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) \\ &= A + \lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{AM} \\ &= (A + \overrightarrow{AM}) + \lambda\overrightarrow{u} \\ &= M + \lambda\overrightarrow{u} \end{aligned}$$

et $f$ est bien une translation de vecteur proportionnel à $\overrightarrow{u}$.
b) De la relation de Grassmann

$$\begin{aligned} f(M) &= f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) \\ &= A + \lambda\overrightarrow{u} - \overrightarrow{AM} \end{aligned}$$

on déduit qu'un point $M$ est fixe pour $f$ si et seulement si

$$M = A + \lambda\overrightarrow{u} - \overrightarrow{AM}$$

c'est-à-dire $2\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u}$ i.e.

$$M = A + \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{u}.$$

Ainsi $Fix\ f$ est réduit à un point situé sur $D(A, \overrightarrow{u})$. Par conséquent, $f$ est une symétrie centrale de centre ce point.

8) a) On suppose que $\overrightarrow{f} = s_{\overrightarrow{u}}$. Montrer que $Fix\ f$ est soit la droite $D(A, \overrightarrow{u})$ soit le vide. En déduire la nature de $f$. *Indication* : on pourra écrire la relation de Grassmann en posant $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.
b) On suppose enfin que $\overrightarrow{f} = s_{\overrightarrow{v}}$. Montrer que $Fix\ f$ est une droite dirigée par $\overrightarrow{v}$ et en déduire la nature de $f$.

**Rép.–** a) Si $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$ alors $s_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{AM}) = x\overrightarrow{u} - y\overrightarrow{v}$. Si $\lambda \neq 0$ cette équation n'a pas de solution et donc $Fix\, f = \emptyset$. Dans ce cas $f$ est la réflexion d'axe $D(A, \overrightarrow{u})$. Si $\lambda = 0$, cette équation a pour solution l'ensemble des points $M$ tels que $y = 0$, autrement dit $Fix\, f = D(A, \overrightarrow{u})$. Dans ce cas $f$ est une symétrie glisée d'axe $D(A, \overrightarrow{u})$ et de translation

de vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$.
b) La relation de Grassmann s'écrit cette fois

$$f(M) = A + \lambda\overrightarrow{u} - x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}.$$

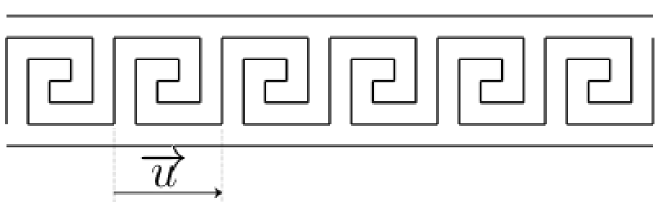
Ainsi $M \in Fix\, f$ si et seulement si

$$x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u} - x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} \iff (2x - \lambda)\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

Par conséquent, $Fix\, f$ est la droite $\{x = \lambda/2\}$ et $f$ est la réflexion par rapport à cette droite.

## Troisième partie : Groupe de frise

On appelle *frise* un sous-ensemble $F \subset B(A, \overrightarrow{u})$ tel que
i) $F$ est invariant par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ i.e. $t_{\overrightarrow{u}}(F) = F$.
ii) Si $F$ est invariant par une translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$. On dit que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur minimal de la frise.
Étant donnée une frise, on s'intéresse au groupe des isométries du plan qui laissent $B(A, \overrightarrow{u})$ et $F$ invariantes. On le note $G(F)$. Par définition $G(F)$ contient le sous groupe des translations $T = \{t_{k\overrightarrow{u}} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.




Une frise et son vecteur minimal

9) Soit $f$ une symétrie glissée d'axe $D(A, \overrightarrow{u})$ et de translation $t_{\lambda\overrightarrow{u}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
a) Montrer que $f \circ f = t_{2\lambda\overrightarrow{u}}$.
b) On suppose que $f \in G(F)$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda = \frac{k}{2}$.

**Rép.**– a) Si $f$ est une symétrie glissée d'axe $D(A, \overrightarrow{u})$ et de translation $t_{\lambda\overrightarrow{u}}$ alors il existe une réflexion $s$ d'axe $D(A, \overrightarrow{u})$ telle que $f = s \circ t_{\lambda\overrightarrow{u}} = t_{\lambda\overrightarrow{u}} \circ s$. On a donc

$$f \circ f = (t_{\lambda\overrightarrow{u}} \circ s) \circ (s \circ t_{\lambda\overrightarrow{u}}) = t_{\lambda\overrightarrow{u}} \circ (s \circ s) \circ t_{\lambda\overrightarrow{u}} = t_{2\lambda\overrightarrow{u}}.$$

b) Puisque $f \in G(F)$, alors $f \circ f \in G(F)$ et donc $t_{2\lambda \overrightarrow{u}} \in T$. Cela signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2\lambda = k$.

10) On note $(x, y)$ les coordonnées de $M$ dans le repère affine $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $s_b$ (resp. $s_c$) la réflexion par rapport à la droite $\{x = b\}$ (resp. $\{x = c\}$).

a) Montrer que $s_c \circ s_b = t_{2(c-b)\overrightarrow{u}}$. En déduire que $s_c = t_{2(c-b)\overrightarrow{u}} \circ s_b$.

b) On suppose que $G(F)$ contient une réflexion $s_b$ par rapport à la droite $\{x = b\}$. Montrer que $G(F)$ contient toutes les réflexions $s_{b+k/2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) On suppose qu'il existe $b$ et $c$ dans $\mathbb{R}$ tels que $s_b$ et $s_c$ sont dans $G(F)$. Montrer que nécessairement $c = b + \frac{k}{2}$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

**Rép.–** a) On note $B$ (resp. $C$) le point de coordonnée $(b, 0)$ (resp $(c, 0)$). On a

$$s_b(M) = s_b(B) + \overrightarrow{s_b}(\overrightarrow{BM})$$

puis

$$s_c \circ s_b(M) = s_c(s_b(B)) + \overrightarrow{s_c} \circ \overrightarrow{s_b}(\overrightarrow{BM}).$$

Or $\overrightarrow{s_c} = \overrightarrow{s_b} = \overrightarrow{s}_{\overrightarrow{v}}$ et $\overrightarrow{s}_{\overrightarrow{v}} \circ \overrightarrow{s}_{\overrightarrow{v}} = \overrightarrow{Id}$. On a aussi $s_b(B) = B$ d'où

$$\begin{aligned} s_c \circ s_b(M) &= s_c(B) + \overrightarrow{BM} \\ &= s_c(C) + \overrightarrow{s_c}(\overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{BM} \end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{CB} \in D(A, \overrightarrow{u})$ donc $\overrightarrow{s_c}(\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{s}_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{CB}) = -\overrightarrow{CB}$. Finalement

$$\begin{aligned} s_c \circ s_b(M) &= C - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} \\ &= C - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} \\ &= M + 2\overrightarrow{BC} \\ &= t_{2\overrightarrow{BC}}(M) \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que $\overrightarrow{BC} = (c - b)\overrightarrow{u}$. Il suffit ensuite de composer par $s_b$ dans les deux membres de l'égalité pour obtenir $s_c = t_{2(c-b)\overrightarrow{u}} \circ s_b$.
b) D'après la question précédente on a

$$t_{k\overrightarrow{u}} \circ s_b = s_{b+k/2}.$$

Puisque $t_{k\overrightarrow{u}} \in G(F)$ et $s_b \in G(F)$, il faut que $s_{b+k/2} \in G(F)$.
c) Si $s_b$ et $s_c$ sont dans $G(F)$ alors $s_c \circ s_b$ est dans $G(F)$. D'après la question a) on a

$$s_c \circ s_b = t_{2(c-b)\overrightarrow{u}}.$$

Il faut donc nécessairement que $2(c - b) \in \mathbb{Z}$ (sinon on contredirait le fait que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur minimal de la frise). Donc, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2(c-b) = k$ c'est-à-dire $c = b + \frac{k}{2}$.

11) Soient $\sigma_B$ et $\sigma_C$ deux symétries centrales de centre $B=(b,0)$ et $C=(c,0)$ tous les deux sur $D(A,\overrightarrow{u})$.

a) Montrer que $\sigma_C \circ \sigma_B = t_{2\overrightarrow{BC}}$.

b) On suppose $\sigma_B$ et $\sigma_C$ appartiennent à $G(F)$ montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\sigma_C = t_{(b+k/2)\overrightarrow{u}} \circ \sigma_B$

**Rép.–** a) On a $\overrightarrow{\sigma_C} = \overrightarrow{\sigma_B} = -\overrightarrow{Id}$ d'où $\overrightarrow{\sigma_C \circ \sigma_B} = \overrightarrow{Id}$ et donc $\sigma_C \circ \sigma_B$ est une translation. On détermine l'image du point $B$ au moyen de la relation de Grassmann

$$\sigma_C \circ \sigma_B(B) = \sigma_C(B) = \sigma_C(C+\overrightarrow{CB}) = \sigma_C(C) + \overrightarrow{\sigma}(\overrightarrow{CB}) = C - \overrightarrow{CB} = B + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CB}$$

d'où

$$\sigma_C \circ \sigma_B(B) = B + 2\overrightarrow{BC}$$

ce qui montre que $\sigma_C \circ \sigma_B = t_{2\overrightarrow{BC}}$.

b) Si $\sigma_B$ et $\sigma_C$ appartiennent à $G(F)$ alors $\sigma_C \circ \sigma_B \in G(F)$ et donc $t_{2\overrightarrow{BC}} \in T$. Ceci signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{u}$. Puisque $\overrightarrow{BC} = (c-b)\overrightarrow{u}$, on en déduit la relation demandée.

12) Déduire des questions précédentes que $G(F)$ est engendré par $t_{\overrightarrow{u}}$ et, lorsqu'ils existent, par une réflexion d'axe dirigée par $\overrightarrow{v}$, une réflexion d'axe dirigée par $\overrightarrow{u}$, une symétrie centrale dont le centre est sur $D(A,\overrightarrow{u})$ et une symétrie glissée d'axe $D(A,\overrightarrow{u})$.

**Rép.–** La seconde partie a montré que les isométries qui laissent $B(A,\overrightarrow{u})$ invariant sont les translations de vecteurs $\lambda\overrightarrow{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, les réflexions d'axes dirigée par $\overrightarrow{v}$, les symétries centrales de centre un point quelconque de $D(A,\overrightarrow{u})$, les symétries glissées d'axe $D(A,\overrightarrow{u})$ et de vecteur $\mu\overrightarrow{u}$, $\mu \in \mathbb{R}$. La troisième partie montre que si l'on veut de surcroit préserver $F$, il faut nécessairement que les translations soient engendrées par une unique translation $t_{\overrightarrow{u}}$, que les réflexions d'axe dirigée par $\overrightarrow{v}$ soient engendrées à partir d'une unique réflexion par composition avec les éléments de $T$, que les symétries centrales soient engendrées à partir d'une unique symétrie centrale par composition avec les éléments de $T$, etc.