Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie – Option Informatique

Corrigé de l'examen du 14 novembre 2016

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Soient A, B et M trois points distincts d'un cercle de centre O. Montrer que $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ (égalité de mesures d'angles orientés de vecteurs).

Rép.– Dans le triangle MAO on a

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = \pi \quad [2\pi].$$

Ce triangle est isocèle donc $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) \quad [2\pi]$ d'où

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = \pi \quad [2\pi].$$

Les mêmes considérations dans le triangle MBO conduisent à

$$2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = \pi \quad [2\pi].$$

En sommant

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = 0 \quad [2\pi].$$

2.– Montrer que les trois médiatrices d'un triangle ABC non plat sont concourantes.

Rép.– La médiatrice Δ_{AB} de $[AB]$ et la médiatrice Δ_{BC} de $[BC]$ sont sécantes en un point O car le triangle est non plat. Ce point O est équidistant de A et de B (car $O \in \Delta_{AB}$) et de B et de C (car $O \in \Delta_{BC}$), il est donc équidistant de A et de C et par conséquent $O \in \Delta_{AC}$.

3.– Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R, et A un point de E. La *puissance* $P_{\mathcal{C}}(A)$ *de* A *par rapport à* $\mathcal{C}$ est le nombre $A\Omega^2 - R^2$. Soit D une droite passant par A et coupant $\mathcal{C}$ en deux points (distincts ou confondus) M et M'. Montrer que $\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'} \rangle = P_{\mathcal{C}}(A)$.

Rép.– Soit M'' le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à M'. On a

$$\begin{array}{rclcl} \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'} \rangle & = & \langle \overrightarrow{AM''}, \overrightarrow{AM'} \rangle & = & \langle \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M''}, \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M'} \rangle \\ & = & \langle \overrightarrow{A\Omega} - \overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M'} \rangle & = & A\Omega^2 - R^2. \end{array}$$

4.– Soit $\beta = \gamma \circ \varphi$ un C^k-reparamétrage ($k \geq 1$) de $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Montrer que $Long(\gamma) = Long(\beta)$.

Rép.– Il s'agit d'appliquer la formule de changement de variables dans une intégrale. En effet

$$\begin{array}{rcl} Long(\beta) & = & \displaystyle\int_J \|\beta'(t)\| dt \\ & = & \displaystyle\int_J \|(\gamma \circ \varphi)'(t)\| dt \\ & = & \displaystyle\int_J \|\gamma'(\varphi(t))\| . |\varphi'(t)| dt \\ & = & \displaystyle\int_I \|\gamma'(u)\| du \\ & = & Long(\gamma). \end{array}$$

5.– Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière,

$$\begin{array}{rccc} S : & [a, b] & \longrightarrow & [0, L] \\ & t & \longrightarrow & S(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du \end{array}$$

son abscisse curviligne et $\varphi : [0, L] \longrightarrow [a, b]$ l'inverse de S. Montrer que $s \longrightarrow \gamma \circ \varphi(s)$ est une courbe paramétrée par la longueur d'arc.

Rép.– Puisque $S \circ \varphi = id$ on a

$$\forall s \in [0, L], \qquad \varphi'(s) = \frac{1}{S'(\varphi(s))} = \frac{1}{\|\gamma'(\varphi(s))\|}.$$

Or

$$(\gamma \circ \varphi)'(s) = \varphi'(s)\gamma'(\varphi(s)) = \frac{\gamma'(\varphi(s))}{\|\gamma'(\varphi(s))\|}.$$

Par conséquent $\|(\gamma \circ \varphi)'(s)\| = 1$ pour tout $s \in [0, L]$.

Le problème. – (10 pts) Soit $n \geq 1$ et $P_0, P_1, \ldots P_n$, $n+1$ points de l'espace affine $E = \mathbb{R}^3$. On appelle courbe de Bézier de degré n et de points de contrôle $P_0, ..., P_n$, la courbe paramétrée

$$\begin{array}{rccc} C: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(t) P_i \end{array}$$

où les $B_{n,i}(t) := \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$ sont les polynômes de Bernstein [1]. Le but de ce problème est d'étudier les propriétés des courbes de Bézier rationnelles.

1) i) On suppose $n = 1$ et $P_0 \neq P_1$. Montrer que le support de C est un segment dont on déterminera les extrémités.
ii) On suppose $n = 2$ et P_0, P_1, P_2 affinement indépendants. Montrer que le support de C est un arc de parabole dont on déterminera le plan osculateur et les extrémités.

Rép.– i) Pour tout $t \in [0,1])$, on a immédiatement

$$C(t) = (1-t)P_0 + tP_1$$

ainsi $C([0,1]) = [P_0, P_1]$.
ii) Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{array}{rcl} C(t) & = & (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 \\ & = & P_0 + 2t\overrightarrow{P_0P_1} + t^2(\overrightarrow{P_2P_1} - \overrightarrow{P_0P_1}) \end{array}$$

Puisque P_0, P_1, P_2 sont affinement indépendants, $\overrightarrow{P_2P_1}$ et $\overrightarrow{P_0P_1}$ ne peuvent être colinéaires. Le terme en t^2 n'est donc pas nul et le support de C est un arc de parabole d'extrémité P_0 et P_2. En particulier la courbe C est une courbe plane, sont plan osculateur est le plan qui contient le support, à savoir le plan affine (P_0, P_1, P_2).

2) i) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ on a $\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(t) = 1$.
ii) En déduire que pour tout $t \in [0,1]$, le point $C(t)$ est dans l'enveloppe convexe [2] des points de contrôle.

1. Avec la convention $B_{0,0}(t) = 1$.
2. On rappelle que l'enveloppe convexe d'une partie $A \subset \mathbb{R}^3$ est l'ensemble des barycentres (à coefficients positifs ou nuls) des familles de points de A

Rép.– i) La formule du binôme de Newton s'écrit

$$1^n = (t + (1-t))^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(t)$$

d'où la relation demandée.
ii) Pour tout $t \in [0,1]$, on a $0 \leq B_{n,i}(t) \leq 1$ et donc $C(t)$ est le barycentre $bar((P_i, B_{n,i}(t)), i \in \{0, 1, ..., n\})$

Pour tout $t \in [0,1]$, on définit une famille de points $(P_{j,i}(t))_{(i,j)\in K}$ où $K = \{(i,j) \mid j \in \{0,...,n\}, i \in \{0,...,n-j\}\}$ par

$$\forall i \in \{0,...,n\}, \quad P_{0,i}(t) := P_i$$

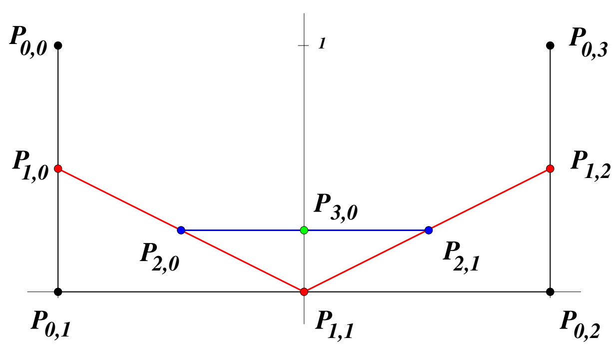
$$\forall j \in \{1,...,n\},\ \forall i \in \{0,...,n-j\}, \quad P_{j,i}(t) = (1-t)P_{j-1,i}(t) + tP_{j-1,i+1}(t)$$

3) On suppose $n = 3$, $t = 1/2$ et

$$P_0 = (-1,1,0),\ P_1 = (-1,0,0),\ P_2 = (1,0,0),\ P_3 = (1,1,0).$$

i) Faire un dessin dans le plan (Oxy) faisant apparaître tous les segments $[P_{j,i}(1/2), P_{j,i+1}(1/2)]$ avec $j \in \{0,1,2\}$ et $i \in \{0,...,2-j\}$, ainsi que le point $P_{3,0}(1/2)$.
ii) Calculer $C(1/2)$. Que remarque-t-on ?

Rép.– i) Les points $P_{j,i}(1/2)$ se placent comme suit :



ii) D'une part $B_{n,i}(1/2) = C_n^i 2^{-n}$ donc

$$C(1/2) = 2^{-3}(P_0 + 3P_1 + 3P_2 + P_3) = 2^{-3}(0,2,0) = (0,1/4,0).$$

D'autre part, les calculs menés en i) montrent que $P_{3,0}(1/2) = (0,1/4,0)$. On constate ainsi que $C(1/2) = P_{3,0}(1/2)$.

4) i) Montrer que pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$ et tout $t \in [0,1]$ on a

$$B_{n,i}(t) = (1-t)B_{n-1,i}(t) + tB_{n-1,i-1}(t)$$

ii) Soit $j \in \{1, ..., n\}$, en utilisant la relation du i) montrer que pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$\sum_{i=0}^{n-j} P_{j,i}(t)B_{n-j,i}(t) = \sum_{i=0}^{n-j+1} P_{j-1,i}(t)B_{n-j+1,i}(t).$$

iii) Montrer que pour tout $j \in \{0, ..., n\}$ et tout $t \in [0,1]$ on a

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n-j} P_{j,i}(t)B_{n-j,i}(t)$$

iv) En déduire que :

$$\forall t \in [0,1], \quad C(t) = P_{n,0}(t).$$

Rép.– i) Soit $A = (1-t)B_{n-1,i}(t) + tB_{n-1,i-1}(t)$ on a

$$\begin{array}{rcl} A & = & (1-t)C_{n-1}^{i}t^{i}(1-t)^{n-1-i} + tC_{n-1}^{i-1}t^{i-1}(1-t)^{n-i} \\ & = & C_{n-1}^{i}t^{i}(1-t)^{n-i} + C_{n-1}^{i-1}t^{i}(1-t)^{n-i} \\ & = & (C_{n-1}^{i} + C_{n-1}^{i-1})t^{i}(1-t)^{n-i} \\ & = & C_{n}^{i}t^{i}(1-t)^{n-i} \\ & = & B_{n,i}(t). \end{array}$$

ii) On a :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-j} P_{j,i}(t)B_{n-j,i}(t) & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-j} \left((1-t)P_{j-1,i}(t) + tP_{j-1,i+1}(t)\right) B_{n-j,i}(t) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-j} P_{j-1,i}(t)(1-t)B_{n-j,i}(t) + \sum_{i=0}^{n-j} P_{j-1,i+1}(t)tB_{n-j,i}(t) \end{array}$$

Or

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-j} P_{j-1,i+1}(t)tB_{n-j,i}(t) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n-j+1} P_{j-1,i}(t)tB_{n-j,i-1}(t) \\ & = & \displaystyle P_{j-1,n-j+1}(t)tB_{n-j,n-j}(t) + \sum_{i=1}^{n-j} P_{j-1,i}(t)tB_{n-j,i-1}(t) \end{array}$$

et

$$\sum_{i=0}^{n-j} P_{j-1,i}(t)(1-t)B_{n-j,i}(t) \quad = \quad P_{j-1,0}(t)(1-t)B_{n-j,0}(t) + \sum_{i=1}^{n-j} P_{j-1,i}(t)(1-t)B_{n-j,i}(t)$$

En sommant les deux dernières égalités et en utilisant la relation de la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-j} P_{j,i}(t)B_{n-j,i}(t) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n-j} P_{j-1,i}(t)B_{n-j+1,i}(t) \\ &\quad +P_{j-1,n-j+1}(t)tB_{n-j,n-j}(t) + P_{j-1,0}(t)(1-t)B_{n-j,0}(t)\end{aligned}$$

Or

$$tB_{n-j,n-j}(t) = t^{n-j+1} = B_{n-j+1,n-j+1}(t)$$

et

$$(1-t)B_{n-j,0}(t) = (1-t)^{n-j+1} = B_{n-j+1,0}(t).$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-j} P_{j,i}(t)B_{n-j,i}(t) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n-j} P_{j-1,i}(t)B_{n-j+1,i}(t) \\ &\quad +P_{j-1,n-j+1}(t)B_{n-j+1,n-j+1}(t) + P_{j-1,0}(t)B_{n-j+1,0}(t)\end{aligned}$$

et finalement

$$\sum_{i=0}^{n-j} P_{j,i}(t)B_{n-j,i}(t) = \sum_{i=0}^{n-j+1} P_{j-1,i}(t)B_{n-j+1,i}(t).$$

iii) Notons que si $j = 0$ la formule demandée est la définition de C, elle est donc vraie. On suppose $j \geq 1$. En itérant j fois la relation du ii) on obtient

$$\sum_{i=0}^{n-j} P_{j,i}(t)B_{n-j,i}(t) = \sum_{i=0}^{n} P_{0,i}(t)B_{n,i}(t)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^{n-j} P_{j,i}(t)B_{n-j,i}(t) = C(t).$$

iv) Il suffit de prendre $j = n$ dans la relation précédente.

5) Montrer que

$$\forall t \in [0,1] \quad B'_{n,i}(t) = \begin{cases} -nB_{n-1,0}(t) & \text{si } i = 0, \\ n(B_{n-1,i-1}(t) - B_{n-1,i}(t)) & \text{si } i \in \{1, ..., n-1\}, \\ nB_{n-1,n-1}(t) & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Rép.– i) Pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$, on a

$$\begin{aligned}
B'_{n,i}(t) &= C_n^i\left(it^{i-1}(1-t)^{n-i} + (n-i)t^i(1-t)^{n-i-1}\right)\\
&= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}t^{i-1}(1-t)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i-1)!}t^i(1-t)^{n-i-1}\\
&= n\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}t^{i-1}(1-t)^{n-i} - n\frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!}t^i(1-t)^{n-i-1}\\
&= n(B_{n-1,i-1}(t) - B_{n-1,i}(t)).
\end{aligned}$$

Si $i = 0$ alors $B_{n,0}(t) = (1-t)^n$ et $B'_{n,0}(t) = -n(1-t)^{n-1} = -nB_{n-1,0}$.
Si $i = n$ alors $B_{n,n}(t) = t^n$ et $B'_{n,n}(t) = nt^{n-1} = nB_{n-1,n-1}(t)$.

6) Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose

$$C_1(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{n,i}(t)P_{i+1} \quad \text{et} \quad C_2(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{n,i}(t)P_i$$

i) Montrer que

$$\forall t \in [0,1], \quad C'(t) = n(C_1(t) - C_2(t))$$

ii) Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $C_1(t) = P_{n-1,0}(t)$ et $C_2(t) = P_{n-1,1}(t)$ (on pourra remarquer que C_1 et C_2 sont des courbes de Bézier de degré $n-1$).
iii) En déduire que la tangente à la courbe C au point t est la droite $(P_{n-1,0}(t)P_{n-1,1}(t))$.

Rép.– i) En dérivant terme à terme on obtient

$$\begin{aligned}
C'(t) &= \sum_{i=0}^{n} B'_{n,i}(t)P_i\\
&= -nB_{n-1,0}(t)P_0 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} n(B_{n-1,i-1}(t) - B_{n-1,i}(t))P_i\right) + nB_{n-1,n-1}(t)P_n\\
&= -n\sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1,i}(t)P_i + n\sum_{i=1}^{n-1} B_{n-1,i-1}(t)P_i + nB_{n-1,n-1}(t)P_n\\
&= -n\sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1,i}(t)P_i + n\sum_{i=0}^{n-2} B_{n-1,i}(t)P_{i+1} + nB_{n-1,n-1}(t)P_n\\
&= -n\sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1,i}(t)P_i + n\sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1,i}(t)P_{i+1}
\end{aligned}$$

qui est la relation demandée. ii) C_1 est la courbe de Bézier de degré $n-1$ construite sur les points $P_0, ..., P_{n-1}$. D'après le *iii* de la question 4, on a donc $C_1(t) = P_{n-1,0}(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Raisonnement similaire pour C_2 avec les points $P_1, ..., P_{n-1}$.
iii) Ainsi $C'(t) = n\overrightarrow{P_{n-1,1}(t)P_{n-1,0}(t)}$. Or $C(t) \in [P_{n-1,1}(t)P_{n-1,0}(t)]$ puisque $C(t) =$

$P_{n,0}(t) = (1-t)P_{n-1,0}(t) + tP_{n-1,1}(t)$. Ainsi $(P_{n-1,0}(t)P_{n-1,1}(t))$ est la droite tangente à C en t.

7) Montrer que quel que soit $n \geq 1$, il n'existe aucun choix de points de contrôle $P_0, ..., P_n$ tel que le support de C soit inclus dans le cercle $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ et non réduit à un point (*Indication* : cette question est indépendante des précédentes).

Rép.– Les fonctions coordonnées (x, y, z) de C sont polynomiales. Notons $x(t) = a_p t^p + ... + a_0$ et $y(t) = b_q t^q + ... + b_0$. Quitte à échanger x et y, on peut supposer $p \geq q$. Le terme dominant de $x^2 + y^2$ est donc $a_p^2 t^{2p}$ si $p > q$ ou $(a_p^2 + b_p^2)t^{2p}$ si $p = q$. Pour avoir $x^2 + y^2 = 1$ il faut donc $p = 0$. Mais alors x, y et bien sûr z sont constants et le support de C est un point.

Pour corriger ce défaut, on introduit des poids $\omega_i > 0$, $i = 0, ..., n$ et on définit les *courbes de Bézier rationnelles* par la formule

$$\begin{array}{rccc} C_R : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \dfrac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \omega_i B_{n,i}(t) P_i}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \omega_i B_{n,i}(t)} \end{array}$$

8) i) Reconnaître C_R lorsque $\omega_0 = ... = \omega_n = 1$.
ii) On suppose $n = 1$. Montrer que le support de C_R est le segment $[P_0, P_1]$.
iii) Soient $n = 2$, $P_0 = (0,1,0)$, $P_1 = (1,1,0)$ et $P_2 = (1,0,0)$, $\omega_0 = 2$ et $\omega_1 = \omega_2 = 1$. Montrer que le support de C_R est un quart du cercle unité $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$.
iv) On suppose toujours $n = 2$ et $\omega_0 = 2$, $\omega_1 = \omega_2 = 1$. Soient $a > b > 0$. Trouver un choix de P_0, P_1 et P_2 tel que le support de C_R soit le quart d'ellipse $\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z = 0\}$.

Rép.– On a alors

$$C_R(t) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(t) P_i}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(t)}$$

mais d'après la question 2.i

$$\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(t) = 1$$

ainsi $C_R = C$.
ii) On a

$$\begin{aligned}
C_R(t) &= \frac{\omega_0(1-t)P_0 + \omega_1 t P_1}{\omega_0(1-t) + \omega_1 t} \\
&= \frac{\omega_0(1-t)P_0 + \omega_1 t P_0 + \omega_1 t P_1 - \omega_1 t P_0}{\omega_0(1-t) + \omega_1 t} \\
&= P_0 + \frac{\omega_1 t}{\omega_0(1-t) + \omega_1 t}\overrightarrow{P_0P_1} \\
&= P_0 + \lambda(t)\overrightarrow{P_0P_1}
\end{aligned}$$

avec $\lambda(t) = \dfrac{\omega_1 t}{\omega_0(1-t) + \omega_1 t}$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a $0 \leq \omega_1 t \leq \omega_0(1-t) + \omega_1 t$ donc $0 \leq \lambda(t) \leq 1$. De plus $\lambda(0) = 0$ et $\lambda(1) = 1$. Ainsi $\lambda([0,1]) = [0,1]$ et $C_R([0,1])$ est le segment $[P_0P_1]$.
iii) On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2} \omega_i B_{2,i}(t) P_i &= 2t^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + (1-t)^2 P_2 \\
&= (2t(1-t) + (1-t)^2, 2t^2 + 2t(1-t), 0) \\
&= (1-t^2, 2t)
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{2} \omega_i B_{2,i}(t) = 2t^2 + 2t(1-t) + (1-t)^2 = 1 + t^2.$$

D'où

$$C_R(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, 0\right).$$

Le changement de variable $t = \tan\frac{\theta}{2}$ montre que le support de C_R est un quart de cercle.
iii) Soit f l'application affine définie par

$$\begin{array}{llll} f: & E & \longrightarrow & E \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (ax, by, z) \end{array}$$

On a

$$f(\{x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z = 0\}) = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z = 0\}.$$

Clairement

$$f(C_R(t)) = f\left(\frac{\sum_{i=0}^{n} \omega_i B_{n,i}(t) P_i}{\sum_{i=0}^{n} \omega_i B_{n,i}(t)}\right) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \omega_i B_{n,i}(t) f(P_i)}{\sum_{i=0}^{n} \omega_i B_{n,i}(t)}.$$

Par conséquent, le choix $P_0 = (0, b, 0) = f(0, 1, 0)$, $P_1 = (a, b, 0) = f(1, 1, 0)$ et $P_2 = (a, 0, 0) = f(1, 0, 0)$ convient.