Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Examen du 18 mars 2022 - durée 2h

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note. Un formulaire trigonométrique est disponible en fin de sujet

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

1.– Énoncer le théorème de classification des isométries de l'espace.

2.– Soit $f : E \to E$ une similitude de rapport $k \neq 1$. Montrer que f a un unique point fixe. On supposera comme acquis le fait que son application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est une similitude vectorielle de même rapport i.e. pour tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$, on a $\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})\| = k\|\overrightarrow{v}\|$.

3.– Soient A, B et M trois points distincts d'un cercle de centre O. Montrer que $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \quad [2\pi]$ (égalité de mesures d'angles orientés de vecteurs).

4.– On rappelle que le birapport de quatre nombres complexes distincts a, b, c, d est donné par

$$[a, b, c, d] := \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b-d}{a-d}.$$

Montrer que le birapport est invariant par similitudes directes et par l'inversion $\sigma(z) = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}^*$.

5.– Écrire le paramétrage colatitude-longitude de la sphère unité épointée des pôles Nord et Sud. Montrer qu'il est régulier.

Le problème. – Ce problème mélange géométrie affine et nombres complexes. Il s'intéresse dans sa dernière partie à l'inversion $z \mapsto \frac{k}{\overline{z}}$, $k \in \mathbb{R}^*$, $z \in \mathbb{C}^*$.
On considère un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni un repère orthonormée $(O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ et on identifie $\mathcal{P}$ avec $\mathbb{C}$ au moyen de l'application

$$M = O + x\overrightarrow{e}_1 + y\overrightarrow{e}_2 \longmapsto z = x + iy.$$

On dit que z est l'*affixe du point* M et également qu'il est l'*affixe du vecteur* $\overrightarrow{OM}$.

Première partie : Équations de droite et de cercle dans $\mathbb{C}$.– Soient z et z' deux éléments de $\mathbb{C}$. Le *produit hermitien* de z par z' est le nombre complexe

$$(z|z') := z\overline{z}'.$$

1) i) Le produit hermitien est-il commutatif ?

ii) Montrer que $(z|z) = |z|^2$.

iii) Montrer que $Re\,(z|z') = \langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'} \rangle$ où z et z' sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$.

iv) Montrer que $Im\,(z|z') = -det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$.

v) Soient u, v deux nombres complexes, $v \neq 0$. Montrer que

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{|v|^2}(u|v)$$

et en déduire que

$$\frac{u}{v} \text{ est réel (resp. imaginaire pur)} \iff (u|v) \text{ est réel (resp. imaginaire pur).}$$

vi) Soient A, B, C trois points distincts de $\mathcal{P}$, d'affixes respectives $a, b, c \in \mathbb{C}$. Montrer que A, B, C sont alignés si et seulement si

$$(b - a|c - a) = \overline{(b - a|c - a)}.$$

2) Soit A et B deux points distincts d'affixes a et b. En utilisant le résultat de la question 1 vi), montrer qu'un point M d'affixe z est un point de la droite (AB) ssi

$$M \in (AB) \iff \overline{\beta}z + \beta\overline{z} + \gamma = 0$$

où $\beta = i(a - b) \in \mathbb{C}^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

3) Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon $r > 0$. On note ω l'affixe de Ω et z l'affixe d'un point M quelconque. Montrer que

$$M \in \mathcal{C} \iff z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} + \gamma = 0$$

où $\gamma = |\omega|^2 - r^2$ est réel.

4) Soient A et B deux points distincts d'affixes a et b et $\lambda > 0$ un réel strictement positif. On considère l'ensemble

$$E_\lambda = \{M \in \mathcal{P} \mid MA = \lambda MB\}.$$

i) Dans le cas où $\lambda = 1$, donner le nom de l'ensemble E_1 (on ne demande aucune démonstration).

ii) On suppose $\lambda \neq 1$. Montrer que $M \in E_\lambda$ si et seulement si

$$z\bar{z} - \frac{a - b\lambda^2}{1-\lambda^2}\bar{z} - \overline{\left(\frac{a-b\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)}z + \frac{|a|^2 - \lambda^2|b|^2}{1-\lambda^2} = 0.$$

iii) En s'appuyant sur la question 3, déduire que E_λ est un cercle dont on déterminera l'affixe du centre.

iv) Montrer que le rayon de ce cercle vaut

$$r = \frac{\lambda|a-b|}{|1-\lambda^2|}.$$

Seconde partie : Transformations affines.– Soit $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ l'application affine donnée par

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto M' = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2 \end{pmatrix}$$

où $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ sont des nombres réels.

5) i) Écrire l'application linéaire $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{\mathcal{P}} \to \overrightarrow{\mathcal{P}}$ associée à f.

ii) On note (x', y') les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$ avec $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e}_1 + y\overrightarrow{e}_2$. On pose $z' = x' + iy'$, $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ et $z = x + iy$. Exprimez z' en fonction de a, b, z et $\bar{z}$.

iii) On commet l'abus de noter $\overrightarrow{f}$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ donnée par $z \mapsto z'$. Montrer que si $b = ia$ alors

$$\overrightarrow{f}(z) = az.$$

iv) On suppose toujours que $b = ia$, montrer que pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$, on a

$$(\overrightarrow{f}(z)|\overrightarrow{f}(w)) = |a|^2(z|w).$$

v) Déduire du iv) la nature géométrique de l'application affine f si $b = ia$.

vi) On se place toujours sous l'hypothèse $b = ia$ et on considère deux points distincts M et N de $\mathcal{P} \setminus \{O\}$. Montrer que si O, M et N sont alignés alors $f(O), f(M)$ et $f(N)$ sont alignés.

6) On suppose que $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ est donnée par

$$z \longmapsto az + c$$

où $c = c_1 + ic_2$ et $a = a_1 + ia_2 = |a|e^{i\theta_a}$ avec $a \neq 1$ et $a \neq 0$.

i) Soient trois points A, B, C deux à deux distincts de $\mathcal{P}$ (affixes z_A, z_B et z_C) et $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$ (affixes z'_A, z'_B et z'_C) leurs images par f. Montrer que

$$mes\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \quad [2\pi]$$

(mesure d'angles orientés).

ii) Montrer que f a un unique point fixe que l'on notera I (affixe z_I).

iii) Soient $\epsilon > 0$ et γ une courbe paramétrée régulière

$$\begin{array}{rccc} \gamma : &]-\epsilon, \epsilon[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & z(t) = x(t) + iy(t). \end{array}$$

On suppose que $\gamma(0) = z_I$ et on note $\delta = f \circ \gamma$ l'image de la courbe γ par f. Montrer que pour tout $t \in]-\epsilon, 0[\cup]0, \epsilon[$ on a

$$\frac{\overrightarrow{\delta(0)\delta(t)}}{t} = \overrightarrow{f}\left(\frac{\overrightarrow{\gamma(0)\gamma(t)}}{t}\right).$$

iv) En déduire que $\overrightarrow{\delta}'(0) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{\gamma}'(0)\right)$.

v) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{\gamma}'(0), \overrightarrow{\delta}'(0)})$.

Troisième partie : Inversion.– On introduit l'*inversion* de centre l'origine et de rapport $k \neq 0$ c'est-à-dire l'application définie par

$$\begin{array}{rccc} inv: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & z = x+iy & \longmapsto & \dfrac{k}{\bar{z}} = \dfrac{k}{x-iy} \end{array}$$

7) i) Calculer $inv \circ inv$. En déduire que inv est bijective et déterminer son inverse.

ii) Soit $\mathcal{C}(r)$ le cercle de centre l'origine et de rayon r. Déterminer toutes les valeurs de r pour lesquelles $inv(\mathcal{C}(r)) \subset \mathcal{C}(r)$.

iii) Pour ces valeurs de r, montrer que l'on a $inv(\mathcal{C}(r)) = \mathcal{C}(r)$.

8) On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $\overline{\beta}z + \beta\overline{z} + \gamma = 0$ où $\beta \in \mathbb{C}^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

i) On suppose que $\gamma = 0$. Ceci implique que $O \in \mathcal{D}$. Montrer que $\mathcal{D} \setminus \{O\}$ est globalement invariante par inv i. e. $inv(\mathcal{D} \setminus \{O\}) = \mathcal{D} \setminus \{O\}$.

ii) On suppose que $\gamma \neq 0$. Montrer si $z \in \mathcal{D}$, alors $inv(z)$ est inclus dans un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

9) Soit a, b, c, d quatre nombre complexes distincts. On rappelle que le *birapport* de ces quatre nombres

$$[a,b,c,d] = \frac{d-a}{d-b} \cdot \frac{c-b}{c-a}$$

est réel non nul si et seulement si a, b, c, d sont cocycliques ou alignés.

i) Soient z_1 et z_2 deux points distincts de $\mathbb{C}^*$ dont les modules sont différents de $\sqrt{|k|}$ et tels que $z_2 \neq inv(z_1)$. Montrer que $z_1, z_2, inv(z_1)$ et $inv(z_2)$ sont deux à deux distincts.

ii) Montrer sous les hypothèses du i) que les affixes $z_1, z_2, inv(z_1), inv(z_2)$ sont cocycliques ou alignés.

Formulaire trigonométrique

$$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}\\
\cos p - \cos q &= -2\sin\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2}\\
\sin p + \sin q &= 2\sin\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}\\
\sin p - \sin q &= 2\sin\tfrac{p-q}{2}\cos\tfrac{p+q}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b\\
\cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b\\
\sin(a+b) &= \sin a\cos b + \sin b\cos a\\
\sin(a-b) &= \sin a\cos b - \sin b\cos a
\end{aligned}$$