Université Claude Bernard Lyon 1

# M1 MEEF – Géométrie

## Corrigé de l'examen du 18 mars 2022 - durée 2h

*Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note. Un formulaire trigonométrique est disponible en fin de sujet*

**Les questions.** – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

**1.**– Énoncer le théorème de classification des isométries de l'espace.

**Rép.**– Tout déplacement de l'espace est l'identité, ou une rotation, ou une translation. Tout antidéplacement de l'espace est une réflexion ou une symétrie glissée ou une anti-rotation.

**2.**– Soit $f : E \to E$ une similitude de rapport $k \neq 1$. Montrer que $f$ a un unique point fixe. On supposera comme acquis le fait que son application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est une similitude vectorielle de même rapport i.e. pour tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$, on a $\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})\| = k\|\overrightarrow{v}\|$.

**Rép.**– Soit $O$ un point de $E$. La relation de Grassmann s'écrit

$$f(M) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}).$$

L'équation $f(M) = M$ est donc équivalente à

$$f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = M$$

soit encore

$$\overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM}$$

i. e.

$$(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id})(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)O}.$$

L'application $\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id}$ est inversible car son noyau est trivial. En effet si $\overrightarrow{v} \in \ker(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id})$ alors

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} \implies \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})\| = \|\overrightarrow{v}\|.$$

Or, puisque $f$ est une similitude propre

$$\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})\| = k\|\overrightarrow{v}\| \quad \text{avec} \quad k \neq 1.$$

Il faut donc $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Ainsi

$$\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id})^{-1}(\overrightarrow{f(O)O})$$

et $M$ est déterminée de façon unique par

$$M = 0 + (\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id})^{-1}(\overrightarrow{f(O)O}).$$

Ainsi l'équation $f(M) = M$ admet une unique solution ce qui montre que $f$ a un unique point fixe.

**3.–** Soient $A$, $B$ et $M$ trois points distincts d'un cercle de centre $O$. Montrer que $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \quad [2\pi]$ (égalité de mesures d'angles orientés de vecteurs).

**Rép.–** Dans le triangle $MAO$ on a

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = \pi \quad [2\pi].$$

Ce triangle est isocèle donc $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) \quad [2\pi]$ d'où

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = \pi \quad [2\pi].$$

Les mêmes considérations dans le triangle $MBO$ conduisent à

$$2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = \pi \quad [2\pi].$$

En sommant

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = 0 \quad [2\pi].$$

**4.–** On rappelle que le birapport de quatre nombres complexes distincts $a, b, c, d$ est donné par

$$[a, b, c, d] := \frac{a - c}{b - c} \cdot \frac{b - d}{a - d}.$$

Montrer que le birapport est invariant par similitudes directes et par l'inversion $\sigma(z) = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}^*$.

**Rép.–** Toute similitude directe s'écrit sous la forme

$$f(z) = \alpha z + \beta$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$. Un calcul direct montre alors que

$$[f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a, b, c, d].$$

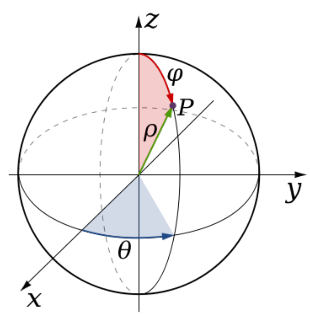
Pour l'inversion, on écrit

$$[\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c), \sigma(d)] = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}} \cdot \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{d}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{d}} = \frac{\frac{c-a}{ac}}{\frac{c-b}{bc}} \cdot \frac{\frac{d-b}{bd}}{\frac{d-a}{ad}} = [a, b, c, d].$$

**5.–** Écrire le paramétrage colatitude-longitude de la sphère unité épointée des pôles Nord et Sud. Montrer qu'il est régulier.

**Rép.–** Le paramétrage colatitude-longitude est donnée par :

$$\begin{array}{rccl} f : & [0, 2\pi]\times]0, \pi[ & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} \\ & (\theta, \varphi) & \longmapsto & (\cos(\theta)\sin(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\varphi)) \end{array}$$




On a

$$f_\theta = (-\sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta)\sin(\varphi), 0)$$

$$f_\varphi = (\cos(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\cos(\varphi), -\sin(\varphi))$$

d'où $f_\theta \wedge f_\varphi = -\sin(\varphi) f$ puis $\|f_\theta \wedge f_\varphi\| = |\sin(\varphi)| \|f\| = 1$ et $f$ est régulière puisque $\varphi \in \,]0, \pi[$ .

**Le problème.** – Ce problème mélange géométrie affine et nombres complexes. Il s'intéresse dans sa dernière partie à l'inversion $z \mapsto \frac{k}{\bar{z}}$, $k \in \mathbb{R}^*$, $z \in \mathbb{C}^*$.
On considère un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni un repère orthonormée $(O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ et on identifie $\mathcal{P}$ avec $\mathbb{C}$ au moyen de l'application

$$M = O + x\overrightarrow{e}_1 + y\overrightarrow{e}_2 \longmapsto z = x + iy.$$

On dit que $z$ est l'*affixe du point* $M$ et également qu'il est l'*affixe du vecteur* $\overrightarrow{OM}$.

Première partie : Équations de droite et de cercle dans $\mathbb{C}$.– Soient $z$ et $z'$ deux éléments de $\mathbb{C}$. Le *produit hermitien* de $z$ par $z'$ est le nombre complexe

$$(z|z') := z\overline{z}'.$$

1) i) Le produit hermitien est-il commutatif ?

ii) Montrer que $(z|z) = |z|^2$.

iii) Montrer que $Re\,(z|z') = \langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'} \rangle$ où $z$ et $z'$ sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$.

iv) Montrer que $Im\,(z|z') = -det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$.

v) Soient $u, v$ deux nombres complexes, $v \neq 0$. Montrer que

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{|v|^2}(u|v)$$

et en déduire que

$$\frac{u}{v} \text{ est réel (resp. imaginaire pur)} \iff (u|v) \text{ est réel (resp. imaginaire pur).}$$

vi) Soient $A, B, C$ trois points distincts de $\mathcal{P}$, d'affixes respectives $a, b, c \in \mathbb{C}$. Montrer que $A, B, C$ sont alignés si et seulement si

$$(b-a|c-a) = \overline{(b-a|c-a)}.$$

**Rép.**– i) On a

$$\overline{(z|z')} = \overline{z\overline{z'}} = \overline{z}z' = (z'|z).$$

Ainsi $(z'|z) = (z|z')$ si et seulement $(z|z')$ est réel. Il suffit de prendre $z = 1$ et $z' = i$ pour avoir un contre-exemple à la commutativité.
ii) C'est immédiat puisque par définition $|z|^2 = z\overline{z}$ et que $z\overline{z} = (z|z)$.
iii) et iv) On a

$$(z|z') = xx' + yy' + i(xy' - x'y)$$

ainsi

$$Re\,(z|z') = \langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'} \rangle \quad \text{et} \quad Im\,(z|z') = -det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$$

v) Les équivalences demandées proviennent de l'égalité

$$\frac{u}{v} = \frac{u\overline{v}}{|v|^2}.$$

vi) Les points $A, B, C$ sont alignés ssi $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$ ssi $(b-a|c-a)$ est réel c'est-à-dire

$$(b-a|c-a) = \overline{(b-a|c-a)}.$$

2) Soit $A$ et $B$ deux points distincts d'affixes $a$ et $b$. En utilisant le résultat de la question 1 vi), montrer qu'un point $M$ d'affixe $z$ est un point de la droite $(AB)$ ssi

$$M \in (AB) \iff \overline{\beta} z + \beta \overline{z} + \gamma = 0$$

où $\beta = i(a-b) \in \mathbb{C}^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

**Rép.**– i) Le point $M$ est élément de la droite $(AB)$ si et seulement si $det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$ ssi $(z-a|b-a)$ est réel ssi $(z-a|b-a) = \overline{(z-a|b-a)}$. En développant on obtient :

$$\begin{array}{rcl} (z-a|b-a) = \overline{(z-a|b-a)} & \iff & (z-a)(\bar{b}-\bar{a}) = (\bar{z}-\bar{a})(b-a) \\ & \iff & (\bar{b}-\bar{a})z - (b-a)\bar{z} = a(\bar{b}-\bar{a}) - \bar{a}(b-a) \\ & \iff & (a-b)\bar{z} - (\bar{a}-\bar{b})z = a\bar{b} - \bar{a}b \\ & \iff & i(a-b)\bar{z} - i(\bar{a}-\bar{b})z = i(a\bar{b} - \bar{a}b) \\ & \iff & i(a-b)\bar{z} + \bar{i}(\bar{a}-\bar{b})z = i(a\bar{b} - \bar{a}b). \end{array}$$

Si on pose $\beta = i(a-b)$ et $\gamma = i(a\bar{b} - \bar{a}b)$ on trouve l'équation demandée. Notons que $\beta$ ne peut valoir zéro car $A$ et $B$ sont distincts et que $\gamma \in \mathbb{R}$ car

$$\bar{\gamma} = \overline{i(a\bar{b} - \bar{a}b)} = -i(\bar{a}b - a\bar{b}) = \gamma.$$

3) Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega$ et de rayon $r > 0$. On note $\omega$ l'affixe de $\Omega$ et $z$ l'affixe d'un point $M$ quelconque. Montrer que

$$M \in \mathcal{C} \iff z\bar{z} - \bar{\omega} z - \omega \bar{z} + \gamma = 0$$

où $\gamma = |\omega|^2 - r^2$ est réel.

**Rép.**– On a

$$\begin{array}{rcl} M \in \mathcal{C} & \iff & |z-\omega|^2 = r^2 \\ & \iff & (z-\omega)(\bar{z} - \overline{\omega}) = r^2 \\ & \iff & z\bar{z} - \bar{\omega} z - \omega \bar{z} + \omega\overline{\omega} - r^2 = 0 \end{array}$$

qui est l'équation demandée avec $\gamma = |\omega|^2 - r^2$.

4) Soient $A$ et $B$ deux points distincts d'affixes $a$ et $b$ et $\lambda > 0$ un réel strictement positif. On considère l'ensemble

$$E_\lambda = \{M \in \mathcal{P} \mid MA = \lambda MB\}.$$

i) Dans le cas où $\lambda = 1$, donner le nom de l'ensemble $E_1$ (on ne demande aucune démonstration).

ii) On suppose $\lambda \neq 1$. Montrer que $M \in E_\lambda$ si et seulement si

$$z\bar{z} - \frac{a-b\lambda^2}{1-\lambda^2}\bar{z} - \overline{\left(\frac{a-b\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)}z + \frac{|a|^2-\lambda^2|b|^2}{1-\lambda^2} = 0.$$

iii) En s'appuyant sur la question 3, déduire que $E_\lambda$ est un cercle dont on déterminera l'affixe du centre.

iv) Montrer que le rayon de ce cercle vaut

$$r = \frac{\lambda|a-b|}{|1-\lambda^2|}.$$

**Rép.**– i) Il s'agit de la médiatrice du segment $[A, B]$.
ii) Écrivons dans $\mathbb{C}$ la condition de définition de l'ensemble $E_\lambda$.

$$\begin{aligned}
M \in E_\lambda &\iff |z-a|^2 = \lambda^2|z-b|^2\\
&\iff (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = \lambda^2(z-b)(\bar{z}-\bar{b})\\
&\iff z\bar{z} - a\bar{z} - z\bar{a} + |a|^2 = \lambda^2\left(z\bar{z} - b\bar{z} - z\bar{b} + |b|^2\right)\\
&\iff (1-\lambda^2)z\bar{z} - (a-b\lambda^2)\bar{z} - (\bar{a}-\bar{b}\lambda^2)z + |a|^2 - \lambda^2|b|^2 = 0\\
&\iff z\bar{z} - \frac{a-b\lambda^2}{1-\lambda^2}\bar{z} - \overline{\left(\frac{a-b\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)}z + \frac{|a|^2-\lambda^2|b|^2}{1-\lambda^2} = 0.
\end{aligned}$$

iii) Si l'on pose

$$\omega = \frac{a-b\lambda^2}{1-\lambda^2} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{|a|^2-\lambda^2|b|^2}{1-\lambda^2} \in \mathbb{R}$$

alors l'équivalence précédente s'écrit

$$M \in E_\lambda \iff z\bar{z} - \omega\bar{z} - \overline{\omega}z + \gamma = 0.$$

D'après ce que l'on a fait à la question 3, ceci est l'équation d'un cercle de centre $\omega$.
iv) On calcule $|\omega|^2$ afin de déterminer $r^2 = |\omega|^2 - \gamma$ :

$$\begin{aligned}
|\omega|^2 &= \left(\frac{a-b\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)\overline{\left(\frac{a-b\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)}\\
&= \frac{1}{(1-\lambda^2)^2}(a-\lambda^2 b)(\bar{a}-\lambda^2\bar{b})\\
&= \frac{1}{(1-\lambda^2)^2}\left(|a|^2 + \lambda^4|b|^2 - \lambda^2(b\bar{a}+a\bar{b})\right).
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
|\omega|^2 - \gamma &= \frac{1}{(1-\lambda^2)^2}\left(|a|^2 + \lambda^4|b|^2 - \lambda^2(b\bar{a}+a\bar{b})\right) - \frac{|a|^2-\lambda^2|b|^2}{1-\lambda^2}\\
&= \frac{1}{(1-\lambda^2)^2}\left(|a|^2 + \lambda^4|b|^2 - \lambda^2(b\bar{a}+a\bar{b}) - (1-\lambda^2)|a|^2 + (1-\lambda^2)\lambda^2|b|^2\right)\\
&= \frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}\left(|a|^2 + |b|^2 - (b\bar{a}+a\bar{b})\right)\\
&= \frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}|a-b|^2
\end{aligned}$$

d'où

$$r = \frac{\lambda|a-b|}{|1-\lambda^2|}.$$

Seconde partie : Transformations affines.– Soit $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ l'application affine donnée par

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto M' = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2 \end{pmatrix}$$

où $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ sont des nombres réels.

5) i) Écrire l'application linéaire $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{\mathcal{P}} \to \overrightarrow{\mathcal{P}}$ associée à $f$.

ii) On note $(x', y')$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$ avec $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e}_1 + y\overrightarrow{e}_2$. On pose $z' = x' + iy'$, $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ et $z = x + iy$. Exprimez $z'$ en fonction de $a$, $b$, $z$ et $\bar{z}$.

iii) On commet l'abus de noter $\overrightarrow{f}$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ donnée par $z \mapsto z'$. Montrer que si $b = ia$ alors

$$\overrightarrow{f}(z) = az.$$

iv) On suppose toujours que $b = ia$, montrer que pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$, on a

$$(\overrightarrow{f}(z)|\overrightarrow{f}(w)) = |a|^2(z|w).$$

v) Déduire du iv) la nature géométrique de l'application affine $f$ si $b = ia$.

vi) On se place toujours sous l'hypothèse $b = ia$ et on considère deux points distincts $M$ et $N$ de $\mathcal{P} \setminus \{O\}$. Montrer que si $O$, $M$ et $N$ sont alignés alors $f(O)$, $f(M)$ et $f(N)$ sont alignés.

**Rép.–** i) Par définition

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$$

avec $f(O) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ et $f(M) = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2 \end{pmatrix}$ d'où

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)} = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ii) D'après la question précédente

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y \\ y' = a_2x + b_2y \end{cases}$$

donc

$$z' = x' + iy' = (a_1x + b_1y) + i(a_2x + b_2y) = ax + by.$$

On remplace alors $x$ et $y$ par

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

d'où

$$z' = a\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) - ib\left(\frac{z - \bar{z}}{2}\right) = \frac{a - ib}{2}z + \frac{a + ib}{2}\bar{z}.$$

iii) Si $b = ia$ alors $a - ib = 2a$ et $a + ib = 0$. Ainsi $z' = az$.
iv) On a

$$(\overrightarrow{f}(z)|\overrightarrow{f}(w)) = (az|aw) = a\bar{a}z\bar{w} = |a|^2(z|w).$$

v) Soient $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ deux vecteurs d'affixes $z$ et $w$. En prenant la partie réelle de la relation obtenue dans la question précédente, on obtient

$$\langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ON})\rangle = |a|^2\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\rangle.$$

Si on choisit $N = M$ et que l'on prend la racine carrée, on obtient

$$O'M' = |a|OM$$

ce qui montre que $f$ est une similitude de rapport $|a|$.
vi) En prenant la partie imaginaire de la relation obtenue en iv) on obtient

$$det\left(\overrightarrow{f(O)f(M)}, \overrightarrow{f(O)f(N)}\right) = |a|^2 det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}).$$

Puisque les points $O, M$ et $N$ sont alignés le déterminant $det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = 0$ est nul. Ceci entraîne $det\left(\overrightarrow{f(O)f(M)}, \overrightarrow{f(O)f(N)}\right) = 0$ et donc les points $f(O), f(M)$ et $f(N)$ sont affinement dépendants.

6) On suppose que $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ est donnée par

$$z \longmapsto az + c$$

où $c = c_1 + ic_2$ et $a = a_1 + ia_2 = |a|e^{i\theta_a}$ avec $a \neq 1$ et $a \neq 0$.

i) Soient trois points $A, B, C$ deux à deux distincts de $\mathcal{P}$ (affixes $z_A$, $z_B$ et $z_C$) et $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$ (affixes $z'_A$, $z'_B$ et $z'_C$) leurs images par $f$. Montrer que

$$mes\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \quad [2\pi]$$

(mesure d'angles orientés).

ii) Montrer que $f$ a un unique point fixe que l'on notera $I$ (affixe $z_I$).

iii) Soient $\epsilon > 0$ et $\gamma$ une courbe paramétrée régulière

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & ]-\epsilon, \epsilon[ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & z(t) = x(t) + iy(t). \end{array}$$

On suppose que $\gamma(0) = z_I$ et on note $\delta = f \circ \gamma$ l'image de la courbe $\gamma$ par $f$. Montrer que pour tout $t \in ]-\epsilon, 0[ \cup ]0, \epsilon[$ on a

$$\frac{\overrightarrow{\delta(0)\delta(t)}}{t} = \overrightarrow{f}\left(\frac{\overrightarrow{\gamma(0)\gamma(t)}}{t}\right).$$

iv) En déduire que $\overrightarrow{\delta}'(0) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{\gamma}'(0)\right)$.

v) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{\gamma}'(0), \overrightarrow{\delta}'(0)})$.

**Rép.–** i) On a

$$\frac{z'_C - z'_A}{z'_B - z'_A} = \frac{(az_C + c) - (az_A + c)}{(az_B + c) - (az_A + c)} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$

ainsi

$$\begin{aligned} mes\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}\right) &= arg\left(\frac{z'_C - z'_A}{z'_B - z'_A}\right) \quad [2\pi] \\ &= arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi] \\ &= mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \quad [2\pi]. \end{aligned}$$

ii) Un point d'affixe $z$ est un point fixe de $f$ si et seulement si $f(z) = z$, ainsi

$$f(z) = z \iff az + c = z \iff z = \frac{c}{1-a}$$

Ceci montre que $f$ admet un unique point fixe dont l'affixe est $z_I = \dfrac{c}{1-a}$.

iii) On a

$$\overrightarrow{\delta(0)\delta(t)} = \overrightarrow{f(\gamma(0))f(\gamma(t))}$$

et puisque $f$ est affine

$$\overrightarrow{f(\gamma(0))f(\gamma(t))} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\gamma(0)\gamma(t)}).$$

Finalement, puisque $\overrightarrow{f}$ est linéaire, pour tout $0 < |t| < \epsilon$ on a

$$\frac{\overrightarrow{\delta(0)\delta(t)}}{t} = \overrightarrow{f}\left(\frac{\overrightarrow{\gamma(0)\gamma(t)}}{t}\right).$$

iv) Il s'en suit que

$$\overrightarrow{\delta}'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\overrightarrow{\delta(0)\delta(t)}}{t} = \lim_{t\to 0} \overrightarrow{f}\left(\frac{\overrightarrow{\gamma(0)\gamma(t)}}{t}\right).$$

Une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie est continue donc

$$\overrightarrow{\delta'(0)} = \overrightarrow{f}\left(\lim_{t\to 0} \frac{\overrightarrow{\gamma(0)\gamma(t)}}{t}\right) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{\gamma'(0)}\right).$$

v) On a montré en 5)ii) que l'application $\overrightarrow{f}$ a pour expression $\overrightarrow{f}(z) = az$. Notons $Z_\gamma$ et $Z_\delta$ les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\gamma}'(0)$ et $\overrightarrow{\delta}'(0)$, on a $Z_\delta = aZ_\gamma$. Ainsi

$$\begin{aligned} mes\,(\widehat{\overrightarrow{\gamma}'(0), \overrightarrow{\delta}'(0)}) &= arg\left(\frac{Z_\delta}{Z_\gamma}\right) \quad [2\pi] \\ &= arg(a) \quad [2\pi] \\ &= \theta_a \quad [2\pi]. \end{aligned}$$

Troisième partie : Inversion.– On introduit l'*inversion* de centre l'origine et de rapport $k \neq 0$ c'est-à-dire l'application définie par

$$\begin{array}{rccc} inv: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & z = x + iy & \longmapsto & \dfrac{k}{\bar{z}} = \dfrac{k}{x - iy} \end{array}$$

7) i) Calculer $inv \circ inv$. En déduire que $inv$ est bijective et déterminer son inverse.

ii) Soit $\mathcal{C}(r)$ le cercle de centre l'origine et de rayon $r$. Déterminer toutes les valeurs de $r$ pour lesquelles $inv(\mathcal{C}(r)) \subset \mathcal{C}(r)$.

iii) Pour ces valeurs de $r$, montrer que l'on a $inv(\mathcal{C}(r)) = \mathcal{C}(r)$.

**Rép.–** i) Notons $z' = inv(z)$. On a

$$inv \circ inv(z) = \frac{k}{\bar{z}'} = \frac{k}{\overline{\left(\frac{k}{\bar{z}}\right)}} = \frac{k}{\left(\frac{k}{z}\right)} = z.$$

Ainsi $inv$ est une involution, son inverse est elle-même.
ii) Soit $z \in \mathcal{C}(r)$ i. e. $|z| = r$. On a

$$|inv(z)| = \frac{|k|}{|\bar{z}|} = \frac{|k|}{|z|} = \frac{|k|}{r}.$$

Donc

$$inv(z) \in \mathcal{C}(r) \iff \frac{|k|}{r} = r \iff r = \sqrt{|k|}.$$

Il n'y a donc qu'une seule valeur possible pour $r$ qui est $\sqrt{|k|}$.
iii) De $inv(\mathcal{C}(r)) \subset \mathcal{C}(r)$ on déduit en composant des deux côtés par $inv$ :

$$inv \circ inv(\mathcal{C}(r)) \subset inv(\mathcal{C}(r))$$

et puisque $inv \circ inv = id$ on en déduit $\mathcal{C}(r) \subset inv(\mathcal{C}(r))$. Ainsi $inv(\mathcal{C}(r)) = C(r)$.

8) On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $\overline{\beta}z + \beta\overline{z} + \gamma = 0$ où $\beta \in \mathbb{C}^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.
i) On suppose que $\gamma = 0$. Ceci implique que $O \in \mathcal{D}$. Montrer que $\mathcal{D} \setminus \{O\}$ est globalement invariante par $inv$ i. e. $inv(\mathcal{D} \setminus \{O\}) = \mathcal{D} \setminus \{O\}$.
ii) On suppose que $\gamma \neq 0$. Montrer si $z \in \mathcal{D}$, alors $inv(z)$ est inclus dans un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

**Rép.–** i) On a

$$z \in \mathcal{D} \setminus \{O\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \overline{\beta}z + \beta\overline{z} = 0 \\ z \neq 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\overline{\beta}}{\overline{z}} + \dfrac{\beta}{z} = 0 \\ z \neq 0 \end{array} \right.$$

où la derniere équivalence a été obtenue en divisant la première équation par $z\overline{z}$. On a ainsi

$$z \in \mathcal{D} \setminus \{O\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \overline{\beta}.inv(z) + \beta.\overline{inv(z)} = 0 \\ z \neq 0 \end{array} \right. \iff inv(z) \in D \setminus \{O\}.$$

ii) Puisque $\gamma \neq 0$, l'origine n'est pas un point de $\mathcal{D}$ et $inv$ est définie en tout point de $\mathcal{D}$. Comme précédemment,

$$z \in \mathcal{D} \iff \overline{\beta}z+\beta\overline{z}+\gamma = 0 \iff \frac{\overline{\beta}}{\overline{z}}+\frac{\beta}{z}+\frac{\gamma}{z\overline{z}} = 0 \iff k\frac{\overline{\beta}}{\overline{z}}+k\frac{\beta}{z}+k^2\frac{\left(\frac{\gamma}{k}\right)}{z\overline{z}} = 0$$

Puis, en constatant que $inv(z) = \frac{k}{\overline{z}}$ :

$$\begin{aligned} z \in \mathcal{D} &\iff \overline{\beta}inv(z) + \beta\overline{inv(z)} + \frac{\gamma}{k}inv(z)\overline{inv(z)} = 0 \\ &\iff k\frac{\overline{\beta}}{\gamma}inv(z) + k\frac{\beta}{\gamma}\overline{inv(z)} + inv(z)\overline{inv(z)} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $inv(z) \in \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $-k\dfrac{\beta}{\gamma}$ et de rayon $r = \left|\dfrac{k\beta}{\gamma}\right|$.

9) Soit $a, b, c, d$ quatre nombre complexes distincts. On rappelle que le *birapport* de ces quatre nombres

$$[a, b, c, d] = \frac{d-a}{d-b} \cdot \frac{c-b}{c-a}$$

est réel non nul si et seulement si $a, b, c, d$ sont cocycliques ou alignés.

i) Soient $z_1$ et $z_2$ deux points distincts de $\mathbb{C}^*$ dont les modules sont différents de $\sqrt{|k|}$ et tels que $z_2 \neq inv(z_1)$. Montrer que $z_1, z_2, inv(z_1)$ et $inv(z_2)$ sont deux à deux distincts.

ii) Montrer sous les hypothèses du i) que les affixes $z_1, z_2, inv(z_1), inv(z_2)$ sont cocycliques ou alignés.

**Rép.–** i) Il y a $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$ couples de points à considérer. Par hypothèse $z_1 \neq z_2$. Puisque $inv$ est inversible, on a nécessairement $inv(z_1) \neq inv(z_2)$. Le calcul du module de $|inv(z)|$ montre que si $|z| \neq \sqrt{|k|}$ alors les modules de $inv(z)$ et de $z$ sont distincts. Ainsi $(z_1, inv(z_1))$ et $(z_2, inv(z_2))$ sont des couples constitués de points différents. Le couple $(z_2, inv(z_1))$ est constitué de deux nombres distincts par hypothèse. Puisque $inv$ est bijective, il en est de même du couple $(inv(z_2), inv \circ inv(z_1))$ c'est-à-dire du couple $(inv(z_2), z_1)$.
ii) Calculons le birapport de ces quatre points

$$\begin{aligned}
[z_1, z_2, inv(z_1), inv(z_2)] &= \frac{inv(z_2) - z_1}{inv(z_2) - z_2} \cdot \frac{inv(z_1) - z_2}{inv(z_1) - z_1} \\
&= \frac{\frac{k}{\bar{z}_2} - z_1}{\frac{k}{\bar{z}_2} - z_2} \cdot \frac{\frac{k}{\bar{z}_1} - z_2}{\frac{k}{\bar{z}_1} - z_1} \\
&= \frac{k - z_1\bar{z}_2}{k - z_2\bar{z}_2} \cdot \frac{k - z_2\bar{z}_1}{k - z_1\bar{z}_1} \\
&= \frac{k - z_1\bar{z}_2}{k - |z_2|^2} \cdot \frac{k - z_2\bar{z}_1}{k - |z_1|^2}
\end{aligned}$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned}
\overline{[z_1, z_2, inv(z_1), inv(z_2)]} &= \frac{(\overline{k - z_1\bar{z}_2})}{k - |z_2|^2} \cdot \frac{(\overline{k - z_2\bar{z}_1})}{k - |z_1|^2} \\
&= \frac{(k - \bar{z}_1 z_2)}{k - |z_2|^2} \cdot \frac{(k - \bar{z}_2 z_1)}{k - |z_1|^2} \\
&= [z_1, z_2, inv(z_1), inv(z_2)].
\end{aligned}$$

Par conséquent le birapport est réel. Il n'est pas nul car les quatre points sont deux à deux distincts.

Formulaire trigonométrique

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2 \cos \tfrac{p+q}{2} \cos \tfrac{p-q}{2} \\
\cos p - \cos q &= -2 \sin \tfrac{p+q}{2} \sin \tfrac{p-q}{2} \\
\sin p + \sin q &= 2 \sin \tfrac{p+q}{2} \cos \tfrac{p-q}{2} \\
\sin p - \sin q &= 2 \sin \tfrac{p-q}{2} \cos \tfrac{p+q}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a
\end{aligned}$$