Université Claude Bernard Lyon 1

M1 EADM – Géométrie

Vendredi 25 novembre 2011 - Durée 2 heures

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Montrer que le produit $t_{\overrightarrow{u}} \circ h_{J,k}$, $k \neq 1$ est une homothétie dont on déterminera le rapport et le centre.

2.– Soit g une application affine. On suppose que $g \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$. Montrer que $\overrightarrow{u} \in Ker(\overrightarrow{g} - id)$.

3.– Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan d'affixes respectives a, b, c, d et soient a', b', c', d' les affixes des images de A, B, C, D par une similitude directe f quelconque. Montrer que $[a', b', c', d'] = [a, b, c, d]$. (On rappelle que $[a, b, c, d] := \frac{\frac{a-c}{b-c}}{\frac{a-d}{b-d}}$).

4.– Soit T le tétraèdre régulier dont les sommets ont pour coordonnées $A = (1, 1, 1)$, $B = (-1, 1, -1)$, $C = (-1, -1, 1)$ et $D = (1, -1, -1)$. Montrer que les retournements autour des bimédianes sont des isométries de T.

5.– Si f et g sont deux applications affines, montrer que $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.

Le problème. – (10 pts) Soit E un plan euclidien, O un point de E et $k \in \mathbb{R}^*$. On appelle *inversion de pôle O et de puissance k* la transformation

$$\begin{array}{rccc} I_{O,k}: & E \setminus \{O\} & \longrightarrow & E \setminus \{O\} \\ & M & \longmapsto & M' = O + \frac{k}{OM^2}\overrightarrow{OM} \end{array}$$

1) Montrer que les inversions sont des involutions. Déterminer selon la valeur de k l'ensemble des points fixes de $I_{O,k}$.

2) Soient A et B deux points de E et A', B' leurs images par $I_{O,k}$, montrer que
$$A'B' = \frac{|k|}{OA.OB} AB.$$
3) On note $h_{O,\lambda}$ l'homothétie de centre O et de rapport λ. Montrer que $I_{O,k} \circ I_{O,k'} = h_{O,\frac{k}{k'}}$. En déduire que $h_{O,\lambda} = I_{O,\lambda k} \circ I_{O,k}$ puis que $h_{O,\lambda} \circ I_{O,k} = I_{O,\lambda k}$.

4) Soit D une droite ne passant par O et $H \in D$ le projeté orthogonal de O sur D. Montrer que
$$M \in D \iff \langle \overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{HM'} \rangle = 0$$
où $M' = I_{O,OH^2}(M)$. En déduire que l'image de D par I_{O,OH^2} est incluse dans un cercle de diamètre $[OH]$.

5) Soit $I_{O,k}$ une inversion de puissance quelconque $k \in \mathbb{R}^*$. Déduire des questions précédentes que l'image $I_{O,k}(D)$ est incluse dans un cercle.

6) Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R, et A un point de E. La *puissance* $P_{\mathcal{C}}(A)$ *de* A *par rapport à* $\mathcal{C}$ est le nombre $A\Omega^2 - R^2$. Soit D une droite passant par A et coupant $\mathcal{C}$ en deux points (distincts ou confondus) M et M'. Montrer que $\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'} \rangle = P_{\mathcal{C}}(A)$.

7) Soient $I_{O,k}$ une inversion, M un point quelconque et $M' = I_{O,k}(M)$. On note $\mathcal{C}$ un cercle quelconque passant par M et M'. Que vaut $P_{\mathcal{C}}(O)$?

8) On suppose que $k > 0$ et on note $\mathcal{S}$ le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k}$. Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ sont orthogonaux. Rappelons que l'on dit que deux cercles sont *orthogonaux* quand ils sont sécants et que les tangentes aux points d'intersection sont orthogonales.