Université Claude Bernard Lyon 1

M1 EADM – Géométrie

Corrigé du partiel du 25 novembre 2011

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Montrer que le produit $t_{\overrightarrow{u}} \circ h_{J,k}$, $k \neq 1$ est une homothétie dont on déterminera le rapport et le centre.

Rép.– Puisque la partie linéaire de $t_{\overrightarrow{u}} \circ h_{J,k}$ est une homothétie de rapport k, la transformation $t_{\overrightarrow{u}} \circ h_{J,k}$ est une homothétie affine de rapport k dont il reste à déterminer le centre K. On a $K = t_{\overrightarrow{u}} \circ h_{J,k}(K) = t_{\overrightarrow{u}}(K')$ avec $K' = h_{J,k}(K)$. Ainsi

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{K'K} = \overrightarrow{K'J} + \overrightarrow{JK} = (1-k)\overrightarrow{JK},$$

soit $K = J + \frac{1}{1-k}\overrightarrow{u}$.

2.– Soit g une application affine. On suppose que $g \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$. Montrer que $\overrightarrow{u} \in Ker(\overrightarrow{g} - id)$.

Rép.– La relation de conjugaison s'écrit $g \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ g^{-1} = t_{\overrightarrow{g}(\overrightarrow{u})}$ d'où $g \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{g}(\overrightarrow{u})} \circ g$. L'hypothèse $g \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$ implique donc $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ *i. e.* $\overrightarrow{u} \in Ker(\overrightarrow{g} - id)$.

3.– Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan d'affixes respectives a, b, c, d et soient a', b', c', d' les affixes des images de A, B, C, D par une similitude directe f quelconque. Montrer que $[a', b', c', d'] = [a, b, c, d]$. (On rappelle que $[a, b, c, d] := \frac{\frac{a-c}{b-c}}{\frac{a-d}{b-d}}$).

Rép.– En notation complexe, on a $f(z) = \alpha z + \beta$ et

$$[a', b', c', d'] = \frac{\dfrac{(\alpha a+\beta)-(\alpha c+\beta)}{(\alpha b+\beta)-(\alpha c+\beta)}}{\dfrac{(\alpha a+\beta)-(\alpha d+\beta)}{(\alpha b+\beta)-(\alpha d+\beta)}} = \frac{\dfrac{\alpha(a-c)}{\alpha(b-c)}}{\dfrac{\alpha(a-d)}{\alpha(b-d)}} = \frac{\dfrac{a-c}{b-c}}{\dfrac{a-d}{b-d}} = [a, b, c, d].$$

4.– Soit T le tétraèdre régulier dont les sommets ont pour coordonnées $A=(1,1,1)$, $B=(-1,1,-1)$, $C=(-1,-1,1)$ et $D=(1,-1,-1)$. Montrer que les retournements autour des bimédianes sont des isométries de T.

Rép.– Les bimédianes sont données par les axes (Ox), (Oy) et (Oz). Le retournement d'axe (Oz) envoie A sur C et B sur D. Il permute donc les sommets de T et par conséquent réalise une isométrie de T. Raisonnement analogue pour les deux autres retournements.

5.– Si f et g sont deux applications affines, montrer que $\overrightarrow{f\circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.

Rép.– On note $M' = g(M)$ et $N' = g(N)$. On a

$$\overrightarrow{f\circ g(M) f\circ g(N)} = \overrightarrow{f(M')f(N')} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{M'N'}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{g(M)g(N)}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{g}(\overrightarrow{MN})).$$

Ainsi $\overrightarrow{f\circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.

Le problème. – (10 pts) Soit E un plan euclidien, O un point de E et $k \in \mathbb{R}^*$. On appelle *inversion de pôle O et de puissance k* la transformation

$$\begin{array}{rccc} I_{O,k}: & E\setminus\{O\} & \longrightarrow & E\setminus\{O\} \\ & M & \longmapsto & M' = O + \frac{k}{OM^2}\overrightarrow{OM} \end{array}$$

1) Montrer que les inversions sont des involutions. Déterminer selon la valeur de k l'ensemble des points fixes de $I_{O,k}$.

Rép.– Soit $M'' = I_{O,k}(M') = I^2_{O,k}(M)$. On a

$$\overrightarrow{OM''} = \frac{k}{OM'^2}\overrightarrow{OM'} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM'} = \frac{k}{OM^2}\overrightarrow{OM} \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{OM''} = \frac{k^2}{OM^2 OM'^2}\overrightarrow{OM}.$$

Puisque $OM' = k.OM^{-1}$, on en déduit $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM}$ ce qui montre que $I_{O,k}$ est une involution. On a aussi

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} \iff \frac{k}{OM^2} = 1.$$

Par conséquent, si $k<0$, l'involution $I_{O,k}$ n'a pas de point de fixe et si $k>0$ son ensemble de points fixes est un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k}$.

2) Soient A et B deux points de E et A', B' leurs images par $I_{O,k}$, montrer que

$$A'B' = \frac{|k|}{OA.OB}AB.$$

Rép.– On a

$$\overrightarrow{A'B'} = k\left(\frac{\overrightarrow{OB'}}{OB^2} - \frac{\overrightarrow{OA'}}{OA^2}\right)$$

d'où

$$\|\overrightarrow{A'B'}\|^2 = k^2\left(\frac{OB^2}{OB^4} + \frac{OA^2}{OA^4} - 2\frac{\langle\overrightarrow{OB'},\overrightarrow{OA'}\rangle}{OB^2OA^2}\right) = \frac{k^2}{OA^2OB^2}\|\overrightarrow{AB}\|^2.$$

3) On note $h_{O,\lambda}$ l'homothétie de centre O et de rapport λ. Montrer que $I_{O,k}\circ I_{O,k'} = h_{O,\frac{k}{k'}}$. En déduire que $h_{O,\lambda} = I_{O,\lambda k}\circ I_{O,k}$ puis que $h_{O,\lambda}\circ I_{O,k} = I_{O,\lambda k}$.

Rép.– Soit $M' = I_{O,k'}(M)$ et $M'' = I_{O,k}(M')$. On a

$$\overrightarrow{OM''} = \frac{k}{OM'^2}\overrightarrow{OM'} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM'} = \frac{k'}{OM^2}\overrightarrow{OM} \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{OM''} = \frac{kk'}{OM^2OM'^2}\overrightarrow{OM}.$$

Or $OM'^2 = k'^2OM^{-2}$ d'où $\overrightarrow{OM''} = \frac{k}{k'}\overrightarrow{OM}$. Ainsi $I_{O,k}\circ I_{O,k'} = h_{O,\frac{k}{k'}}$ que l'on peut écrire $h_{O,\lambda} = I_{O,\lambda k}\circ I_{O,k}$. En composant à droite des deux côtés par $I_{O,k}$ et en remarquant que les inversions sont des involutions on obtient $h_{O,\lambda}\circ I_{O,k} = I_{O,\lambda k}$.

4) Soit D une droite ne passant par O et $H\in D$ le projeté orthogonal de O sur D. Montrer que

$$M\in D \iff \langle\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{HM'}\rangle = 0$$

où $M' = I_{O,OH^2}(M)$. En déduire que l'image de D par I_{O,OH^2} est incluse dans un cercle de diamètre $[OH]$.

Rép.– On a

$$M\in D \iff \langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OH}\rangle = OH^2$$

or $\overrightarrow{OM'} = \frac{OH^2}{OM^2}\overrightarrow{OM}$ d'où

$$M\in D \iff \langle\frac{OM^2}{OH^2}\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OH}\rangle = OH^2.$$

Or $OM' = k.OM^{-1} = OH^2.OM^{-1}$ ($cf.$ 1) donc $OM = OH^2OM'^{-1}$ et

$$\begin{aligned} M\in D &\iff \langle\frac{OH^2}{OM'^2}\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OH}\rangle = OH^2\\ &\iff \langle\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OH}\rangle = OM'^2\\ &\iff \langle\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OM'}\rangle = 0\\ &\iff \langle\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{M'H}\rangle = 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, si $M \in D$ alors $M' = I_{O,OH^2}(M)$ est dans un cercle de diamètre $[OH]$.

5) Soit $I_{O,k}$ une inversion de puissance quelconque $k \in \mathbb{R}^*$. Déduire des questions précédentes que l'image $I_{O,k}(D)$ est incluse dans un cercle.

Rép.– D'après la question 3, on a $h_{O,\lambda} \circ I_{O,k} = I_{O,\lambda k}$. En particulier, $h_{O,\lambda} \circ I_{O,OH^2} = I_{O,k}$ avec $\lambda = k.OH^{-2}$. On conclut en remarquant que l'image d'un cercle par une homothétie est un cercle.

6) Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R, et A un point de E. La *puissance* $P_{\mathcal{C}}(A)$ *de* A *par rapport à* $\mathcal{C}$ est le nombre $A\Omega^2 - R^2$. Soit D une droite passant par A et coupant $\mathcal{C}$ en deux points (distincts ou confondus) M et M'. Montrer que $\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'} \rangle = P_{\mathcal{C}}(A)$.

Rép.– Soit M'' le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à M'. On a

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'} \rangle &= \langle \overrightarrow{AM''}, \overrightarrow{AM'} \rangle &&= \langle \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M''}, \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M'} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{A\Omega} - \overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M'} \rangle &&= A\Omega^2 - R^2. \end{aligned}$$

7) Soient $I_{O,k}$ une inversion, M un point quelconque et $M' = I_{O,k}(M)$. On note $\mathcal{C}$ un cercle quelconque passant par M et M'. Que vaut $P_{\mathcal{C}}(O)$?

Rép.– On a

$$P_{\mathcal{C}}(O) = \langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'} \rangle = \langle \overrightarrow{OM}, \frac{k}{OM^2}\overrightarrow{OM} \rangle = k.$$

8) On suppose que $k > 0$ et on note $\mathcal{S}$ le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k}$. Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ sont orthogonaux. Rappelons que l'on dit que deux cercles sont *orthogonaux* quand ils sont sécants et que les tangentes aux points d'intersection sont orthogonales.

Rép.– Notons Ω le centre de $\mathcal{C}$ et R son rayon. Une simple application du théorème de Pythagore montre que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ sont orthogonaux si et seulement si $O\Omega^2 = R^2 + k$. Autrement dit

$$\mathcal{S} \perp \mathcal{C} \iff P_{\mathcal{C}}(O) = k.$$

Et cette dernière égalité a été établie en 7.