Université Claude Bernard Lyon 1

M1 EADM – Géométrie

Jeudi 15 novembre 2012 - Durée 2 heures

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Montrer que si $\overrightarrow{f} = kId$, $k \neq 1$, alors f est une homothétie dont on déterminera le rapport et le centre.

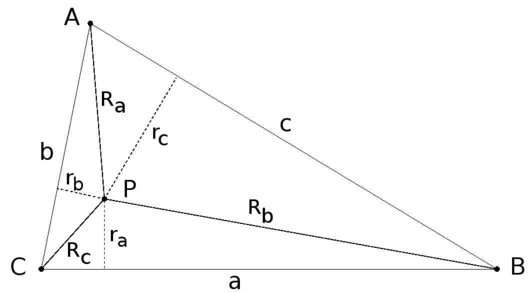
2.– Montrer que si le sous-espace affine $Fix\ f$ des points fixes d'une isométrie plane f est une droite, alors f est une réflexion par rapport à $D = Fix\ f$.

3.– Soit s une réflexion du plan et r une rotation plane. Montrer que $\forall\ k \in \mathbb{N}$ on a $s \circ r^k \circ s = r^{-k}$.

4.– Soit $T = \{A, B, C, D\}$ un tétraèdre régulier. Montrer que le cardinal de l'ensemble des isométries affines qui conservent T est inférieur ou égal à 24.

5.– Soient A, B et M trois points distincts d'un cercle de centre O. Montrer que $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ (égalité de mesures d'angles orientés de vecteurs).

Le problème. – (10 pts) Soit P un point à l'intérieur d'un triangle ABC. On appelle a, b, c les longueurs des trois côtés ; r_a, r_b, r_c les distances de P au côtés et R_a, R_b, R_c les longueurs PA, PB, PC.



1) On suppose que $P \in BC$. Montrer que :
   i) Aire(ABC)= $\frac{1}{2}(br_b + cr_c)$.
   ii) $aR_a \geq br_b + cr_c$.

2) En utilisant une homothétie de centre A, montrer que $a.R_a \geq br_b + cr_c$ pour tout P dans ABC.

3) En utilisant l'image de P par la réflexion par rapport à la bissectrice de l'angle en A, montrer que pour tout P dans ABC on a

$$aR_a \geq br_{\mathbf{c}} + cr_{\mathbf{b}}.$$

4) Déduire de la question précédente que :

$$R_a + R_b + R_c \geq \frac{b^2 + c^2}{bc} r_a + \frac{c^2 + a^2}{ca} r_b + \frac{a^2 + b^2}{ab} r_c$$

puis établir l'inégalité d'Erdös-Mordell :

$$R_a + R_b + R_c \geq 2(r_a + r_b + r_c).$$

5) Montrer que cette inégalité est une égalité si et seulement si ABC est un triangle équilatéral de centre P.

6) On suppose que ABC est équilatéral et $P \in ABC$. Que vaut le minimum de $P \longmapsto R_a + R_b + R_c$?

7) On suppose de nouveau que le triangle ABC est quelconque. Montrer que

$$R_a.R_b.R_c \geq 8r_a.r_b.r_c$$

(Indication : on pourra commencer par montrer que si $x > 0$ et $y > 0$ alors $x + y \geq 2\sqrt{xy}$).