Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Partiel du 11 octobre 2013 - durée 2h

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine. Montrer que si $Fix\ f$ est non vide, alors c'est un sous-espace affine de E.

2.– Soient $f : E \longrightarrow E$ une application affine inversible et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$. Montrer que

$$f \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ f^{-1} = t_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})}.$$

3.– Soient $O \in E$ et $L \in GL(\overrightarrow{E})$. Pour tout $M \in E$, on définit une application affine $f : E \longrightarrow E$ par $f(M) = f(O) + L(\overrightarrow{OM})$. Montrer que f est injective et surjective.

4.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une isométrie. Montrer que $Ker(\overrightarrow{f} - id) \perp Im(\overrightarrow{f} - id)$.

5.– Décrire géométriquement la similitude plane dont la forme complexe est $f(z) = (1+i)\overline{z} - 1$.

Le problème. – (10 pts)

1) Soient P un plan affine et $f : P \longrightarrow P$ une application affine. Montrer que f est entièrement déterminée par l'image $(f(A_0), f(A_1), f(A_2))$ d'une base affine quelconque (A_0, A_1, A_2) de P.

2) Soient Δ_1, Δ_2, Δ_3 (resp. Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3) trois droites d'un plan affine P en position générale (i.e. deux à deux sécantes et d'intersections distinctes).

Soient $A = \Delta_2 \cap \Delta_3$, $B = \Delta_1 \cap \Delta_3$ et $C = \Delta_1 \cap \Delta_2$.

i) Montrer que (A, B, C) est une base affine de P.

ii) Montrer qu'il existe une unique transformation affine $f : P \longrightarrow P$ telle que $f(\Delta_i) = \Delta'_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

3) Dans cette question on suppose que Δ_1, Δ_2 et Δ_3 (resp. Δ'_1, Δ'_2 et Δ'_3) sont concourantes en un point A (resp. A').

i) Montrer qu'il existe une application affine $f : P \longrightarrow P$ telle que $f(\Delta_i) = \Delta'_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. Indication : on pourra introduire les points $B \in \Delta_2$, $C \in \Delta_3$, $B' \in \Delta'_2$, $C' \in \Delta'_3$ tels que $(BC)//\Delta_1$ et $(B'C')//\Delta'_1$.

ii) L'application f est-elle unique ?

4) On suppose désormais que $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

i) Montrer que si $\lambda \neq 1$ alors il existe une homothétie et une seule qui envoie A sur A' et B sur B'. Déterminer son rapport et son centre.

ii) Montrer que si $\lambda = 1$ alors il existe une translation et une seule qui envoie A sur A' et B sur B'.

5) Montrer que deux triangles non aplatis du plan affine se déduisent l'un de l'autre par une homothétie ou une translation si et seulement si leurs côtés sont deux à deux parallèles.

6) Soient Δ_1, Δ_2 et Δ_3 (resp. Δ'_1, Δ'_2 et Δ'_3) trois droites de l'espace affine E de dimension 3. On suppose que deux quelconques de ces droites ne sont jamais coplanaires.

i) Montrer qu'il existe un parallélépipède $ABCDEFGH$ et un seul qui s'appuie sur ces trois droites.

ii) Montrer qu'il existe une transformation affine $f : E \longrightarrow E$ et une seule telle que $f(\Delta_i) = \Delta'_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.