Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Corrigé du partiel du 11 octobre 2013

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine. Montrer que si $Fix\ f$ est non vide, alors c'est un sous-espace affine de E.

Rép.– Soit $A \in Fix\ f$ (qui est non vide). On va montrer que $\overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in Fix\ f\}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. Or

$$\begin{array}{rcll} \{\overrightarrow{AM} \mid M \in Fix\ f\} & = & \{\overrightarrow{AM} \mid f(M) = M\} & \\ & = & \{\overrightarrow{AM} \mid f(M)_f(A) = M - A\} & \text{car } f(A) = A \\ & = & \{\overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{AM}\} & \\ & = & \{\overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM}\} & \text{car } f \text{ affine} \\ & = & Ker\,(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{E}}). & \end{array}$$

2.– Soient $O \in E$ et $L \in GL(\overrightarrow{E})$. Pour tout $M \in E$, on définit une application affine $f : E \longrightarrow E$ par $f(M) = f(O) + L(\overrightarrow{OM})$. Montrer que f est injective et surjective.

Rép.– Injectivité : Soient M et N tels que $f(M) = f(N)$. La définition de L implique que $L(\overrightarrow{OM}) = L(\overrightarrow{ON})$ donc que $\overrightarrow{MN} \in\ Ker\ L$. Or $L \in GL(\overrightarrow{E})$ donc $Ker\ L = \{\overrightarrow{0}\}$ et par conséquent $M = N$.
Surjectivité : Soit $M' \in E$, il s'agit de résoudre l'équation $M' = f(O) + L(\overrightarrow{OM})$ où M est l'inconnue. Cette équation a pour solution $M = O + L^{-1}(\overrightarrow{O'M'})$.

3.– Soient $f : E \longrightarrow E$ une application affine inversible et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$. Montrer que

$$f \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ f^{-1} = t_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})}.$$

Rép.– Soit M' un point quelconque de E et $M = f^{-1}(M)$. On a :

$$f \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ f^{-1}(M') = f \circ t_{\overrightarrow{u}}(M) = f(M + \overrightarrow{u}) = f(M) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = M' + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}).$$

4.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une isométrie. Montrer que $Ker(\overrightarrow{f} - id) \perp Im(\overrightarrow{f} - id)$.

Rép.– Soit $\overrightarrow{x} \in Ker(\overrightarrow{f} - id)$ et $\overrightarrow{y} \in Im(\overrightarrow{f} - id)$. On a donc $(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$ et il existe $\overrightarrow{z} \in \overrightarrow{E}$ tel que $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z}$. Ainsi

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z} \rangle = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{z}) \rangle - \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} \rangle = \langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{z}) \rangle - \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} \rangle = 0$$

car $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle.

5.– Décrire géométriquement la similitude plane dont la forme complexe est $f(z) = (1 + i)\overline{z} - 1$.

Rép.– Il s'agit de l'écriture sous forme complexe d'une similitude indirecte. Le rapport est $|1 + i| = \sqrt{2} \neq 1$ et un calcul direct montre que le centre est $\omega = 2 + i$. Son axe fait un angle de $\frac{1}{2}arg(1 + i) = \pi/8$ avec l'horizontale et il passe par ω. Finalement $f = h_{\omega,\sqrt{2}} \circ s_{\Delta}$.

Le problème. – (10 pts)

1) Soient P un plan affine et $f : P \longrightarrow P$ une application affine. Montrer que f est entièrement déterminée par l'image $(f(A_0), f(A_1), f(A_2))$ d'une base affine quelconque (A_0, A_1, A_2) de P.

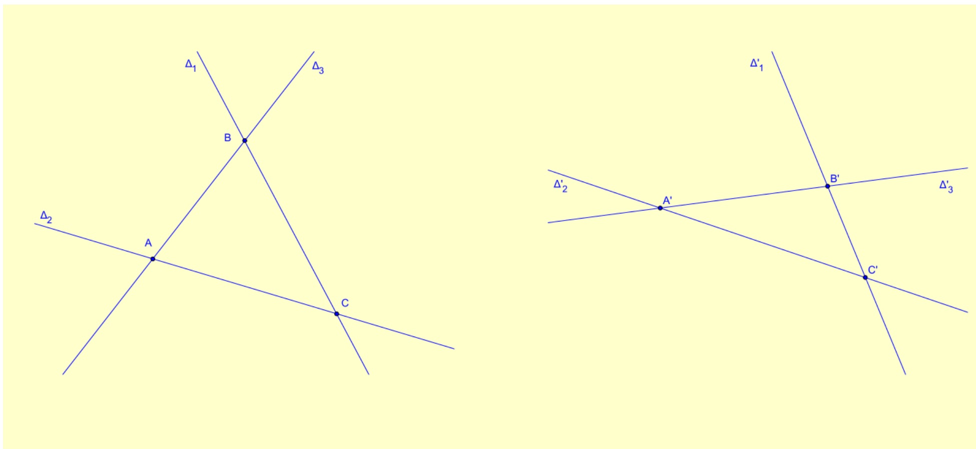
Rép.– Soit M un point quelconque de P. La formule de Grassmann $f(M) = f(A_0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0M})$ montre que $f(M)$ est entièrement déterminée par l'image d'un point, disons A_0, et l'image par $\overrightarrow{f}$ du vecteur $\overrightarrow{A_0M}$. Or $\overrightarrow{f}$ est entièrement déterminée par l'image d'une base de $\overrightarrow{P}$, disons $(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2})$. Enfin $f(A_1) = f(A_0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0A_1})$ et $f(A_2) = f(A_0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0A_2})$ ce qui montre que la connaissance de $(f(A_0), f(A_1), f(A_2))$ suffit à déterminer f.

2) Soient Δ_1, Δ_2, Δ_3 (resp. Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3) trois droites d'un plan affine P en position générale (i.e. deux à deux sécantes et d'intersections distinctes). Soient $A = \Delta_2 \cap \Delta_3$, $B = \Delta_1 \cap \Delta_3$ et $C = \Delta_1 \cap \Delta_2$.

i) Montrer que (A, B, C) est une base affine de P.

ii) Montrer qu'il existe une unique transformation affine $f : P \longrightarrow P$ telle que $f(\Delta_i) = \Delta'_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

Rép.– i) Il suffit de montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base vectorielle de $\overrightarrow{P}$, c'est-à-dire que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est linéairement indépendant. Or, si ce n'était pas le cas, les droites $(AB) = \Delta_3$ et $(AC) = \Delta_2$ seraient parallèles, et comme elles ont un point commun, elles seraient confondues. En contradiction avec l'hypothèse de l'énoncé.



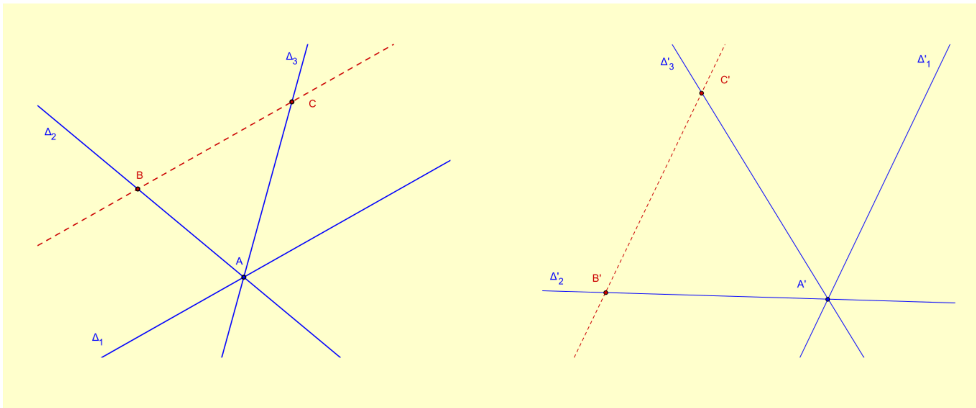
ii) Si une telle transformation $f : P \longrightarrow P$ existe alors nécessairement A, B et C sont point fixes car ce sont les intersections des droites Δ_i qui sont globalement préservées. Réciproquement, toute transformation qui fixe A, B et C préserve les Δ_i. Enfin, il existe une unique application affine f telle que $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = C$ puisque (A, B, C) est un repère affine.

3) Dans cette question on suppose que Δ_1, Δ_2 et Δ_3 (resp. Δ'_1, Δ'_2 et Δ'_3) sont concourantes en un point A (resp. A').

i) Montrer qu'il existe une application affine $f : P \longrightarrow P$ telle que $f(\Delta_i) = \Delta'_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. Indication : on pourra introduire les points $B \in \Delta_2$, $C \in \Delta_3$, $B' \in \Delta'_2$, $C' \in \Delta'_3$ tels que $(BC)//\Delta_1$ et $(B'C')//\Delta'_1$.

ii) L'application f est-elle unique ?

Rép.– i) Il existe une transformation affine f et une seule qui transforme le repère affine (A, B, C) en le repère affine (A', B', C'). Cette application transforme les droites Δ_2 et Δ_3 en les droites Δ'_2 et Δ'_3. Comme toute transformation affine conserve le parallélisme, elle transforme la droite Δ_1 en une droite parallèle à la droite $(B'C')$ passant par A' , c'est-à-dire en la droite Δ'_1 .



ii) Une transformation qui vérifie $f(\Delta_i) = \Delta'_i$ pour $i \in \{1,2,3\}$ n'est pas unique : toute transformation affine $h \circ f$, où h est une homothétie quelconque de centre A', possède aussi cette propriété.

4) On suppose désormais que $\overrightarrow{A'B'} = \lambda \overrightarrow{AB}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

i) Montrer que si $\lambda \neq 1$ alors il existe une homothétie et une seule qui envoie A sur A' et B sur B'. Déterminer son rapport et son centre.

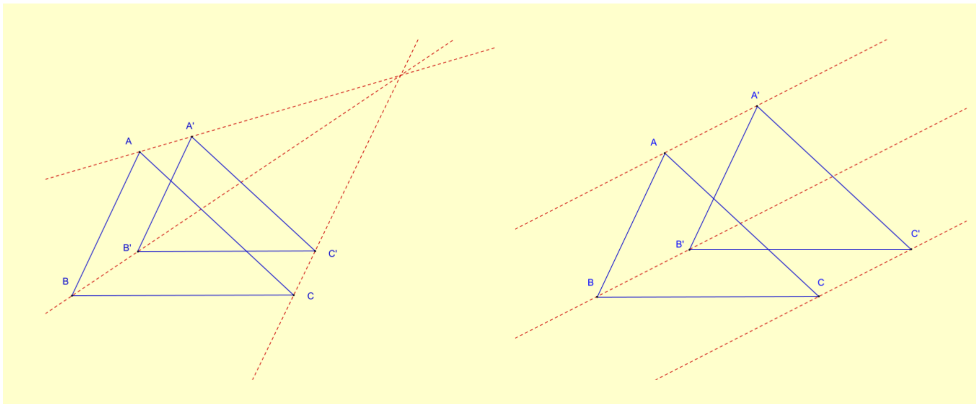
ii) Montrer que si $\lambda = 1$ alors il existe une translation et une seule qui envoie A sur A' et B sur B'.

Rép.– i) Si une telle homothétie existe alors son rapport doit être λ et son centre est déterminé par la relation $\overrightarrow{OA'} = \lambda \overrightarrow{OA}$. En particulier $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'} = \lambda \overrightarrow{OA'}$ d'où $O = A + \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{AA'}$. Une telle homothétie h envoie A sur A', B sur B' et fixe O. Elle est unique car son centre et son rapport sont uniquement déterminés par la condition $h(A) = A'$ et $h(B) = B'$.
ii) Si une telle translation existe alors le vecteur de cette translation est nécessairement $\overrightarrow{AA'}$ et donc la translation est unique. Or, cette translation $t := t_{\overrightarrow{AA'}}$ convient puisque

$$t(B) = B + \overrightarrow{AA'} = B + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'A'} = B + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BA} = B + \overrightarrow{BB'} = B'.$$

5) Montrer que deux triangles non aplatis du plan affine se déduisent l'un de l'autre par une homothétie ou une translation si et seulement si leurs côtés sont deux à deux parallèles.

Rép.– ($\Rightarrow$) Une homothétie ou une translation conserve le parallélisme : la condition est donc nécessaire.



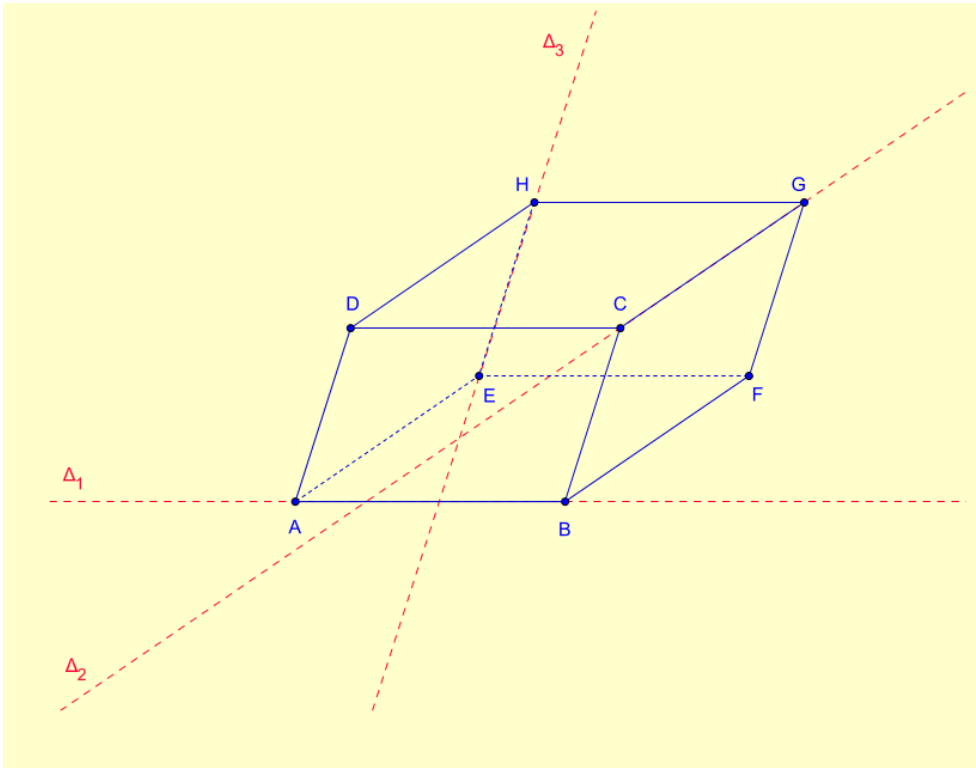
($\Leftarrow$) Réciproquement, les droites (AB) et $(A'B')$ étant parallèles, d'après la question précédente, il existe une homothétie ou une translation f qui transforme A en A' et B en B'. L'image $f(C)$ de C par f appartient à la parallèle à (AC) passant par A' , i.e. à la droite $(A'C')$ et à la parallèle à (BC) passant par B' , i.e. à la droite $(B'C')$: c'est donc le point C'.

6) Soient Δ_1, Δ_2 et Δ_3 (resp. Δ'_1, Δ'_2 et Δ'_3) trois droites de l'espace affine E de dimension 3. On suppose que deux quelconques de ces droites ne sont jamais coplanaires.

i) Montrer qu'il existe un parallélépipède $ABCDEFGH$ et un seul qui s'appuie sur ces trois droites.

ii) Montrer qu'il existe une transformation affine $f : E \longrightarrow E$ et une seule telle que $f(\Delta_i) = \Delta'_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

Rép.– i) Le point A est obtenu comme intersection de Δ_1 et du plan passant par Δ_3 dont la direction contient celle de Δ_2. Il est donc uniquement dérminé. De même pour les autres points.



ii) Soit $A'B'C'D'E'F'G'H'$ un parallélépipède s'appuyant de même sur Δ'_1, Δ'_2 et Δ'_3. Une transformation affine f de E transforme Δ_i en Δ'_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ si et seulement si elle transforme $ABCDEFGH$ en $A'B'C'D'E'F'G'H'$. Il faut et il suffit pour cela qu'elle transforme le repère affine (A, B, E, D) de E en le repère affine (A', B', E', D'). Or, il existe une et une seule transformation affine qui vérifie cette propriété.