Université Claude Bernard Lyon 1

# M1 MEEF – Géométrie

## Partiel du 12 octobre 2015 - durée 2h

*Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.*

**Les questions.** – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

**1.**– Soit $f : E \longrightarrow E$ une isométrie. Montrer que $f$ est injective.

**2.**– Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine bijective. Montrer que $f^{-1}$ est affine.

**3.**– Soient $F \subset E$ un sous-espace affine non vide et $f : E \longrightarrow H$ une application affine. Montrer que $f(F) \subset H$ est un sous-espace affine.

**4.**– Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine inversible et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$. Montrer que $f \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ f^{-1} = t_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})}$.

**5.**– Soient $h_{I,k}$ (resp. $h_{J,k^{-1}}$) l'homothétie de centre $I \in E$ (resp. $J \in E$) et de rapport $k > 0$ (resp. $k^{-1}$). Montrer que $h_{I,k} \circ h_{J,k^{-1}}$ est une translation de vecteur $(k-1)\overrightarrow{IJ}$. On admettra que les applications affines dont la partie linéaire est l'identité sont des translations.

**Le problème.** – (10 pts) Dans tout ce problème on identifie l'espace affine euclidien orienté $\mathbb{R}^2$ au corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. On note $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$ tel que $0 = O$, $1 = O + \overrightarrow{u}$ et $i = O + \overrightarrow{v}$. Comme toujours, on commet l'abus de notation consistant à confondre un nombre complexe et son affixe, en particulier $z = x + iy = O + x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

1) a ) Soit $f : \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ une application affine. Montrer qu'il

existe $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}^6$ tels que

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad f(z) = (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1) + i(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)$$

et interpréter géométriquement les cœfficients $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ et $\gamma_2$.
b) Montrer qu'il existe $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ et $c = c_1 + ic_2$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ f(z) = az + b\bar{z} + c$$

et déterminer $a, b$ et $c$ en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$.

2) On appelle *similitudes* du plan les transformations $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui conservent le rapport des distances, i. e. il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, p \neq q, \quad \frac{|f(p) - f(q)|}{|p - q|} = k$$

Montrer qu'une application affine $f(z) = az + b\bar{z} + c$ est une similitude du plan si et seulement si

$$(a = 0 \text{ et } b \neq 0) \quad \text{ou} \quad (a \neq 0 \text{ et } b = 0).$$

3) On va montrer que les similitudes du plan sont nécessairement des applications affines. Soit

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f} : & \overrightarrow{\mathbb{R}^2} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathbb{R}^2} \\ & \overrightarrow{w} & \longmapsto & \overrightarrow{f(O)f(O + \overrightarrow{w})} \end{array}$$

a) Montrer que pour tout $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2}$, on a $\|\tilde{f}(\overrightarrow{w})\| = k\|\overrightarrow{w}\|$
b) Montrer que pour tout $(\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2) \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2} \times \overrightarrow{\mathbb{R}^2}$, on a

$$\|\tilde{f}(\overrightarrow{w}_1) - \tilde{f}(\overrightarrow{w}_2)\| = k\|\overrightarrow{w}_1 - \overrightarrow{w}_2\|$$

c) Montrer que pour tout $(\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2) \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2} \times \overrightarrow{\mathbb{R}^2}$, on a

$$\langle \tilde{f}(\overrightarrow{w}_1), \tilde{f}(\overrightarrow{w}_2) \rangle = k^2 \langle \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2 \rangle$$

d) Montrer que pour tout $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, tout $(\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2) \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2} \times \overrightarrow{\mathbb{R}^2}$, on a

$$\|\tilde{f}(\alpha_1 \overrightarrow{w}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{w}_2) - \alpha_1 \tilde{f}(\overrightarrow{w}_1) - \alpha_2 \tilde{f}(\overrightarrow{w}_2)\| = 0$$

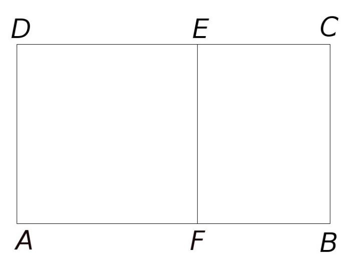
e) En déduire de que les similitudes du plan sont les applications de la forme $f(z) = az + c$ (similitudes directes) ou $f(z) = a\bar{z} + c$ (similitudes indirectes) avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $c \in \mathbb{C}$.

4) Montrer qu'une similitude $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de rapport $k \neq 1$ possède un unique point fixe $\Omega$. Ce point fixe est appelé le *centre* de la similitude.

5) Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une similitude de centre $\Omega$ et de rapport $k \neq 1$. On considère l'homothétie $h_{\Omega,1/k} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de centre $\Omega$ et de rapport $1/k$ et on pose $g := h_{\Omega,1/k} \circ f$.
a) Montrer que $g$ admet $\Omega$ comme point fixe.
b) On suppose $f(z) = az + c$. Montrer que $g$ est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle en fonction de $a$ et de $\omega$.
c) On suppose $f(z) = a\bar{z} + c$. Donner l'écriture complexe de $g$ en fonction de $a$ et de $\omega$ puis décrire la nature géométrique de $g$.

6) Montrer que toute similitude $f$ avec $k \neq 1$ est la composée commutative d'une homothétie et d'une isométrie admettant le centre de l'homothétie comme point fixe.

7) Soit $R = (ABCD)$ un rectangle avec $AB > BC$ et $R' = (BCEF)$ un autre rectangle tel que $E \in ]CD[$ et $F \in ]AB[$. On suppose qu'il existe une similitude directe $f$ telle que $f(R) = R'$.




a) Montrer par l'absurde que $f([AB]) = [EF]$ ou $[BC]$. En déduire le rapport $k$ de la similitude et montrer que son angle vaut $\pm\frac{\pi}{2}$
b) Montrer que $f([AC]) = [EB]$.
c) On suppose désormais que $f(A) = B$. Que valent $f(B)$, $f(C)$ et $f(D)$ ?
d) Montrer que $f \circ f$ est une homothétie de même centre que $f$.
e) Déterminer le centre de $f$.