Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Corrigé du partiel du 26 septembre 2016

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

1.– Soit $O \in E$. Montrer que tout élément $f \in GA(E)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $f = t \circ g$ où t est une translation et g un élément de $GA(E)$ qui fixe O.

Rép.– Soit $O' = f(O)$. On définit g en posant

$$g := t_{-\overrightarrow{OO'}} \circ f \qquad (*)$$

On a $g(O) = 0$ et g est composée de deux éléments de $GA(E)$, donc $g \in GA(E)$. Il suffit d'inverser $(*)$ pour obtenir $f = t \circ g$. Supposons $f = t_1 \circ g_1 = t_2 \circ g_2$ Ceci implique $t_1 \circ g_1(O) = t_2 \circ g_2(O)$ d'où $t_1(O) = t_2(O)$ et donc $t_1 = t_2$. Mais alors $g_1 = t_1^{-1} \circ f = t_2^{-1} \circ f = g_2$ d'où l'unicité de la décomposition.

2.– Soient $O \in E$ et $f_1 = t_{\overrightarrow{u}_1} \circ g_1$, $f_2 = t_{\overrightarrow{u}_2} \circ g_2$ où g_1 et g_2 sont des éléments de $GA(E)$ qui fixent O. Montrer que

$$f_1 \circ f_2 = t_{\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{g_1}(\overrightarrow{u}_2)} \circ g_1 \circ g_2.$$

Rép.– Montrons d'abord que si $g : E \longrightarrow E$ une application affine inversible et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$ alors $g \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ g^{-1} = t_{\overrightarrow{g}(\overrightarrow{u})}$. En effet si M' un point de E et $M = g^{-1}(M')$ alors on a

$$g \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ g^{-1}(M') = g \circ t_{\overrightarrow{u}}(M) = g(M + \overrightarrow{u}) = g(M) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{u}) = M' + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{u}).$$

On en déduit que

$$f_1 \circ f_2 = t_{\overrightarrow{u}_1} \circ g_1 \circ t_{\overrightarrow{u}_2} \circ g_2 = t_{\overrightarrow{u}_1} \circ t_{\overrightarrow{g_1}(\overrightarrow{u}_2)} \circ g_1 \circ g_2 = t_{\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{g_1}(\overrightarrow{u}_2)} \circ g_1 \circ g_2.$$

3.– Soient $h_{I,k}$ (resp. $h_{J,k'}$) l'homothétie de centre $I \in E$ (resp. $J \in E$) et de rapport $k > 0$ (resp. $k' > 0$). on suppose que $kk' \neq 1$. Montrer que $h_{I,k} \circ h_{J,k'}$ est une homothétie de rapport kk' et de centre $K = I + \frac{k(1-k')}{1-kk'}\overrightarrow{IJ}$. On admettra que les applications affines dont la partie linéaire est une homothétie vectorielle sont des homothéties affines de même rapport.

Rép.– La partie linéaire de $h_{I,k} \circ h_{J,k'}$ est une homothétie vectorielle de rapport $kk' \neq 1$. Ainsi $h_{I,k} \circ h_{J,k'}$ est une homothétie de rapport kk'. Soit K son centre. On note $K' = h_{J,k'}(K)$ autrement dit $\overrightarrow{JK'} = k'\overrightarrow{JK}$. Puisque $h_{I,k} \circ h_{J,k'}(K) = K$ on a aussi $K = h_{I,k}(K')$ i. e. $\overrightarrow{IK} = k\overrightarrow{IK'}$. Par conséquent

$$\overrightarrow{IK} = k(\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK'}) = k(\overrightarrow{IJ} + k'\overrightarrow{JK}) = k(\overrightarrow{IJ} + k'\overrightarrow{JI} + k'\overrightarrow{IK})$$

d'où $\overrightarrow{IK} = \frac{k(1-k')}{1-kk'}\overrightarrow{IJ}$.

4.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une isométrie, $F = Fix\ f$, $A \in E \setminus F$, $A' = f(A)$, H l'hyperplan médiateur de $[A, A']$ et s_H la réflexion hyperplane d'hyperplan H. Montrer que $Fix\ g$ où $g = s_H \circ f$ contient F et A.

Rép.– Notons que A est fixe par g puisque $s_H(A') = A$.
Soit $M \in F$ alors $A'M' = AM$ car f est une isométrie et $A'M = AM$ car M est fixe. Donc M est dans l'hyperplan médiateur de $[A, A']$, i. e. $M \in H$. Mais alors $g(M) = M$ et $M \in Fix\ g$.

5.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une isométrie. Montrer que $Ker(\overrightarrow{f} - id) \perp Im(\overrightarrow{f} - id)$.

Rép.– Soit $\overrightarrow{x} \in Ker(\overrightarrow{f} - id)$ et $\overrightarrow{y} \in Im(\overrightarrow{f} - id)$. On a donc $(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$ et il existe $\overrightarrow{z} \in \overrightarrow{E}$ tel que $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z}$. Ainsi

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z} \rangle = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{z}) \rangle - \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} \rangle = \langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{z}) \rangle - \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} \rangle = 0$$

car $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle.

Le problème. – (10 pts) On note E un espace affine de dimension 2 ou trois.

1) Soient $p \geq 1$, $A_1, ..., A_p$ des points de E, $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des réels tels que

$\lambda = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$ et ϕ définie par

$$\begin{array}{rccl} \phi : & E & \longrightarrow & \overrightarrow{E} \\ & M & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}. \end{array}$$

i) Montrer que ϕ est une bijection.
ii) Le point G tel que $\phi(G) = \overrightarrow{0}$ est appelé le *barycentre*[1] de la famille de points pondérées $((A_1, \lambda_1), ..., (A_p, \lambda_p))$ et on note $G = bar((A_1, \lambda_1), ..., (A_p, \lambda_p))$. Montrer que si O est une origine quelconque de E alors

$$G = O + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.$$

iii) Soient A, B deux points quelconques de E. On rappelle que le segment $[A, B]$ est l'ensemble des points

$$[A, B] = \{M \in E \mid \exists \lambda \in [0, 1] \text{ tel que } M = A + \lambda \overrightarrow{AB}\}$$

Montrer que $[A, B] = \{G \in E \mid G = bar((A, (1 - \lambda)), (B, \lambda)), \lambda \in [0, 1]\}$.

Rép.– i) Soit $O \in E$. La relation de Chasles entraîne

$$\phi(M) = \phi(O) + \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \right) \overrightarrow{MO}.$$

Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, l'équation $\phi(M) = \overrightarrow{u}$ a une unique solution donnée par

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\lambda} \left(\phi(O) - \overrightarrow{u} \right).$$

ii) Il suffit de remplacer $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{0}$ dans l'équation précédente pour obtenir

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\lambda} \phi(O) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.$$

iii) On a

$$\begin{array}{rcl} [A, B] & = & \{M \in E \mid \exists \lambda \in [0, 1] \text{ tel que } M = A + \lambda \overrightarrow{AB}\} \\ & = & \{M \in E \mid \exists \lambda \in [0, 1] \text{ tel que } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB}\} \\ & = & \{M \in E \mid \exists \lambda \in [0, 1] \text{ tel que } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AO} + \lambda \overrightarrow{OB}\} \\ & = & \{M \in E \mid \exists \lambda \in [0, 1] \text{ tel que } \overrightarrow{OM} = (1 - \lambda) \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}\} \\ & = & \{M \in E \mid \exists \lambda \in [0, 1] \text{ tel que } M = bar((A, (1 - \lambda)), (B, \lambda))\}. \end{array}$$

1. Il est appelé *isobarycentre* si $\lambda_1 = ... = \lambda_p$.

2) i) Pour toute la suite on note $f : E \longrightarrow E$ une application affine quelconque. Montrer que f conserve le barycentre c'est-à-dire :

$$G = bar((A_1, \lambda_1), ..., (A_p, \lambda_p)) \implies f(G) = bar((f(A_1), \lambda_1), ..., (f(A_p), \lambda_p)).$$

pour tout système de points pondérés $(A_1, \lambda_1), ..., (A_p, \lambda_p)$.
ii) Soient A, B deux points quelconques de E. Montrer que l'image par f du segment $[A, B]$ est le segment $[f(A), f(B)]$.

Rép.– i) On a

$$f(G) = f\left(O + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}\right) = f(O) + \overrightarrow{f}\left(\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}\right)$$

par la relation de Grassmann. D'où par linéarité de $\overrightarrow{f}$

$$f(G) = f(O) + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OA_i})$$

En écrivant une nouvelle fois les relations de Grassmann $f(A_i) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OA_i})$, on constate que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OA_i}) = \overrightarrow{f(O)f(A_i)}$ d'où

$$f(G) = f(O) + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{f(O)f(A_i)}.$$

c'est écrire que $f(G) = bar((f(A_1), \lambda_1), ..., (f(A_p), \lambda_p))$.
ii) Puisque

$$[A, B] = \{bar((A, (1 - \lambda)), (B, \lambda)) \text{ avec } \lambda \in [0, 1]\}$$

par conservation du barycentre on a

$$f([A, B]) = \{bar((f(A), (1 - \lambda)), (f(B), \lambda)) \text{ avec } \lambda \in [0, 1]\}.$$

Or

$$\{bar((f(A), (1 - \lambda)), (f(B), \lambda)) \text{ avec } \lambda \in [0, 1]\} = [f(A), f(B)]$$

donc $f([A, B]) = [f(A), f(B)]$.

3) On dit qu'une partie $P \in E$ est *convexe* si

$$\forall\ (M_1, M_2) \in P \times P, \quad [M_1, M_2] \subset P.$$

i) Soient A, B dans E. Montrer que $[A, B]$ est convexe.
ii) Soient A, B, C trois points affinement indépendants et soit $P_{(AB),C}$ le demi-plan affine fermé défini par

$$P_{A,B,C} = \{A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \geq 0\}.$$

Montrer que $P_{A,B,C}$ est convexe.
iii) Montrer que si P_1 et P_2 sont convexes alors $P_1 \cap P_2$ est convexe.
iv) Montrer que si P est une partie convexe alors $f(P)$ est partie convexe de E.

Rép.– i) Soient $M_1 = A + \lambda_1\overrightarrow{AB}$, $M_2 = A + \lambda_2\overrightarrow{AB}$ avec $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$. Il faut montrer que pour tout $M \in [M_1, M_2]$ on a $M \in [A, B]$. Notons que

$$\begin{aligned}
M \in [M_1, M_2] &\iff \exists\mu \in [0,1] \text{ tel que } M = M_1 + \mu\overrightarrow{M_1M_2} \\
&\iff \exists\mu \in [0,1] \text{ tel que } M = (A + \lambda_1\overrightarrow{AB}) + \mu(\lambda_2 - \lambda_1)\overrightarrow{AB} \\
&\iff \exists\mu \in [0,1] \text{ tel que } M = A + (\lambda_1 + \mu(\lambda_2 - \lambda_1))\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

Posons $\lambda = \lambda_1 + \mu(\lambda_2 - \lambda_1)$. Puisque $\mu \in [0,1]$, on a $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ ($\in [\lambda_2, \lambda_1]$ si $\lambda_1 > \lambda_2$) et donc $\lambda \in [0,1]$, i.e. $M \in [A, B]$. Ainsi $[A, B]$ est convexe.
ii) Soient $M_1 = A + \lambda_1\overrightarrow{AB} + \mu_1\overrightarrow{AC}$, $M_2 = A + \lambda_2\overrightarrow{AB} + \mu_2\overrightarrow{AC}$, il faut montrer que pour tout $M \in [M_1, M_2]$ on a $M \in P_{A,B,C}$. Notons que

$$\begin{aligned}
M \in [M_1, M_2] &\iff \exists t \in [0,1] \text{ tel que } M = M_1 + t\overrightarrow{M_1M_2} \\
&\iff \exists t \in [0,1] \text{ tel que } M = (A + \lambda_1\overrightarrow{AB} + \mu_1\overrightarrow{AC}) + t(\lambda_2 - \lambda_1)\overrightarrow{AB} + t(\mu_2 - \mu_1)\overrightarrow{AC} \\
&\iff \exists t \in [0,1] \text{ tel que } M = A + (\lambda_1 + t(\lambda_2 - \lambda_1))\overrightarrow{AB} + (\mu_1 + t(\mu_2 - \mu_1))\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

Posons $\mu = \mu_1 + t(\mu_2 - \mu_1)$. Puisque $t \in [0,1]$, on a $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ ($\in [\mu_2, \mu_1]$ si $\mu_1 > \mu_2$) et donc $\mu \geq 0$ i.e. $M \in P_{A,B,C}$. Ainsi $P_{A,B,C}$ est convexe.
iii) Il est évident que si $[M_1M_2] \subset P_1$, $[M_1, M_2] \subset P_2$ alors $[M_1M_2] \subset P_1 \cap P_2$. Ceci montre si P_1 et P_2 sont convexes alors $P_1 \cap P_2$ est convexe.
iv) Soient A' et B' dans $f(P)$. Il existe A et B dans P tels que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$. Puisque P est convexe, $[A, B] \subset P$. Par conséquent $f([A, B]) \subset f(P)$. D'après le $1.iii$, on a aussi $f([A, B]) = [A', B']$. Au bilan $[A', B'] \subset f(P)$ et $f(P)$ est convexe.

On dit qu'un point C d'une partie convexe P est extrémal si pour tout couple de points distincts $M_1 \in P$, $M_2 \in P$, $M_1 \neq M_2$, on a

$$C = M_1 + \lambda\overrightarrow{M_1M_2} \Longrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1.$$

On note $\mathcal{E}(P)$ l'ensemble des points extrémaux de P.

4) Soient A, B deux points distincts de E. On veut montrer que les points extrémaux de $P = [A, B]$ sont A et B.
i) Soit $M \in]A, B[$. Montrer que M n'est pas extrémal.
ii) Montrer que si $M \in [A, B]$ n'est pas extrémal alors $M \in]A, B[$
iii) En déduire que $\mathcal{E}([A, B]) = \{A, B\}$

Rép.– i) On a

$$]A, B[= \{M \in E \mid \exists \lambda \in]0, 1[\text{ tel que } M = A + \lambda \overrightarrow{AB}\}$$

et donc tous les points de $]A, B[$ sont non extrémaux (prendre $M_1 = A$ et $M_2 = B$).
ii) Soit $M \in [A, B]$ un point non extrémal, alors il existe un couple de point $(M_1, M_2) \in P \times P$ tel que

$$M = M_1 + \lambda \overrightarrow{M_1 M_2} \quad \text{et} \quad 0 < \lambda < 1.$$

Donc $M \in]M_1, M_2[\subset]A, B[$.
iii) Les points i et ii montrent que l'ensemble des points non extrémaux est exactement $]A, B[$, l'ensemble des points extrémaux est donc le complémentaire i. e. $\{A, B\}$.

5) On suppose désormais que $f : E \longrightarrow E$ est bijective et que $P \subset E$ est une partie convexe. On note $X(P) = P \setminus \mathcal{E}(P)$ l'ensemble des points non extrémaux de P.
i) Montrer que $f(X(P)) \subset X(f(P))$.
ii) En utilisant l'application réciproque f^{-1} montrer que $X(f(P)) \subset f(X(P))$ et en déduire que $f(\mathcal{E}(P)) = \mathcal{E}(f(P))$.
iii) On suppose que le cardinal de $\mathcal{E}(P)$ est fini. Montrer que si $f(P) = P$ alors l'isobarycentre des points de $\mathcal{E}(P)$ est un point fixe de f.

Rép.– i) Soit $M \in X(P)$, il existe M_1, M_2 distincts dans P et $0 < \lambda < 1$ tel que $M = M_1 + \lambda \overrightarrow{M_1 M_2}$. Par conséquent

$$f(M) = f(M_1) + \lambda \overrightarrow{f}(\overrightarrow{M_1 M_2}) = f(M_1) + \lambda \overrightarrow{f(M_1) f(M_2)}.$$

Comme f est bijective, $f(M_1)$ et $f(M_2)$ sont distincts et donc $f(M) \in X(f(P))$.
ii) On applique la formule du i à $f(P)$ et avec f^{-1}. On obtient

$$f^{-1}(X(f(P))) \subset X(f^{-1}(f(P)) = X(P)$$

puis par composition par f

$$X(f(P)) \subset f(X(P)).$$

Cette formule combinée à celle du i montre que $X(f(P)) = f(X(P))$. En passant au complémentaire on en déduit $f(\mathcal{E}(P)) = \mathcal{E}(f(P))$.

iii) Supposons $\mathcal{E}(P) = \{A_1, ..., A_p\}$ et posons $O = bar((A_1, 1), ..., (A_p, 1))$. D'après la question $2.i$ on a

$$f(O) = bar((f(A_1), 1), ..., (f(A_p), 1)).$$

Or d'après le point ii, $\{f(A_1), ..., f(A_p)\} = f(\{A_1, ..., A_p\})$ sont les points extrémaux de $f(P) = P$, donc

$$\{f(A_1), ..., f(A_p)\} = \{A_1, ..., A_p\} \quad \text{et} \quad f(O) = bar((A_1, 1), ..., (A_p, 1)) = O.$$

6) Soient A, B et C trois points affinement indépendants de E. On note

$$ABC = \{A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}, 0 \leq \lambda, 0 \leq \mu, \lambda + \mu \leq 1\}$$

le triangle plein de sommets A, B, et C.
i) Soit $P_{B,C,A}$ le demi-plan affine fermé défini de façon analogue au $3.ii$ par la formule

$$P_{B,C,A} = \{B + \lambda\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{BA}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \geq 0\}.$$

Montrer que

$$P_{B,C,A} = \{A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda + \mu \leq 1\}.$$

ii) Montrer de même que

$$P_{C,A,B} = \{A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}, 0 \leq \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

iii) Montrer que ABC est l'intersection des trois demi-plans $P_{A,B,C}$, $P_{B,C,A}$ et $P_{C,A,B}$. En déduire que ABC est convexe.

Rép.– i) On a

$$\begin{aligned}
P_{B,C,A} &= \{B + \lambda\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{BA}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \geq 0\} \\
&= \{A + \overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{BA} + \lambda\overrightarrow{AC} - \mu\overrightarrow{AB}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \geq 0\} \\
&= \{A + (1 - \lambda - \mu)\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \geq 0\}
\end{aligned}$$

Posons $x = 1 - \lambda - \mu$ et $y = \lambda$. On a $\mu = 1 - x - y$, par conséquent : $\mu \geq 0 \iff x + y \leq 1$. Ainsi

$$P_{B,C,A} = \{A + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}, x \in \mathbb{R}, x + y \leq 1\}$$

ii) De même

$$\begin{aligned}
P_{C,A,B} &= \{C + \lambda\overrightarrow{CA} + \mu\overrightarrow{CB}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \geq 0\} \\
&= \{A + \overrightarrow{AC} - \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{CA} + \mu\overrightarrow{AB}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \geq 0\} \\
&= \{A + \mu\overrightarrow{AB} + (1 - \lambda - \mu)\overrightarrow{AC}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \geq 0\}
\end{aligned}$$

On pose $x = \mu$ et $y = 1 - \lambda - \mu$ ainsi

$$P_{C,A,B} = \{A + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}, x \geq 0, y \in \mathbb{R}\}.$$

iii) D'après le i et le ii on a

$$P_{A,B,C} \cap P_{B,C,A} \cap P_{C,A,B} = \{A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}, 0 \leq \lambda, 0 \leq \mu, \lambda + \mu \leq 1\}$$

ce qui montre que

$$ABC = P_{A,B,C} \cap P_{B,C,A} \cap P_{C,A,B}$$

D'après 3.ii et 3.iii, le triangle plein ABC est une partie convexe de E comme intersection finie de parties convexes.

7) On suppose désormais que dim $E = 2$. Étant donné $P \subset E$ on note $GA(E,P)$ l'ensemble des transformations affines $f : E \longrightarrow E$ qui laissent P invariant :

$$GA(E,P) = \{f \in GA(E) \mid f(P) = P\}$$

On s'intéresse au cas où P est un triangle plein ABC, les points A, B et C étant linéairement indépendants. On admettra que $\mathcal{E}(ABC) = \{A, B, C\}$
i) On note $\mathfrak{S}_3$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{A, B, C\}$. On pose

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & GA(E, ABC) & \longrightarrow & \mathfrak{S}_3 \\ & f & \longmapsto & f_{|\{A,B,C\}} \end{array}$$

où $f_{|\{A,B,C\}}$ est la restriction de f à $\{A, B, C\}$. Montrer que Φ est bien définie.
ii) Montrer que f est injective (on pourra utiliser le fait que (A, B, C) est une base affine).
iii) Soit $f : E \longrightarrow E$ une transformation affine quelconque. On suppose que f permute les points A, B et C i. e. $f(\{A, B, C\}) = \{A, B, C\}$. Montrer que $f(ABC) = ABC$ (on pourra utiliser la conservation des barycentres).
iv) Montrer que Φ est une bijection. Quel est le cardinal de $GA(E, ABC)$?

Rép.– i) On pose $P = ABC$. Puisque $f(P) = P$ d'après le 5.ii on a $f(\mathcal{E}(P)) = \mathcal{E}(f(P)) = \mathcal{E}(P)$. Ainsi $\mathcal{E}(P)$ est invariant. Comme f est une transformation, $f_{\mathcal{E}}$ est une permutation de $\mathcal{E} = \{A, B, C\}$. Ceci montre que Φ est bien définie.
ii) Puisque dim $E = 2$ et que les points A, B et C étant linéairement indépendants, ils forment une base affine. Une application affine $f : E \longrightarrow E$ est donc entièrement déterminée par l'image des points A, B et C. Ainsi, étant donnée une permutation de $\{A, B, C\}$ il existe une transformation affine et une seule $f \in GA(E)$ telle que $f_{|\{A,B,C\}}$ soit cette permutation. Ceci montre que Φ est injective.

iii) On a

$$\begin{aligned} ABC &= \{A+\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}, 0\le\lambda, 0\le\mu, \lambda+\mu\le 1\} \\ &= \{O+\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AO}+\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{AO}+\mu\overrightarrow{OC}, 0\le\lambda, 0\le\mu, \lambda+\mu\le 1\} \\ &= \{O+(1-\lambda-\mu)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}, 0\le\lambda, 0\le\mu, \lambda+\mu\le 1\} \\ &= \{bar((A,(1-\lambda-\mu)),(B,\lambda),(C,\mu)), 0\le\lambda, 0\le\mu, \lambda+\mu\le 1\} \end{aligned}$$

Puisque $f(\{A,B,C\}) = \{A,B,C\}$, par conservation du barycentre $f(ABC) = ABC$.
iv) D'après le *ii*, toute permutation de $\mathfrak{S}_3$ a un antécédent et un seul $f \in GA(E)$. D'après *iii* cet antécédent vérifie $f(ABC) = ABC$ autrement dit $f \in GA(E, ABC)$. Ainsi Φ est une bijection et

$$card\, GA(E, ABC) = card\, \mathfrak{S}_3 = 6.$$