Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Partiel du 28 septembre 2017

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

1.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine. Montrer que si $Fix\ f$ est non vide, alors c'est un sous-espace affine de E.

2.– Soit $O \in E$. Montrer que tout élément $f \in GA(E)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $f = t \circ g$ où t est une translation et g un élément de $GA(E)$ qui fixe O.

3.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine bijective. Montrer que f^{-1} est affine.

4.– Soit g une application affine. On suppose que $g \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$. Montrer que $\overrightarrow{u} \in Ker(\overrightarrow{g} - \overrightarrow{id})$.

5.– Soient $h_{I,k}$ (resp. $h_{J,k^{-1}}$) l'homothétie de centre $I \in E$ (resp. $J \in E$) et de rapport $k > 0$ (resp. k^{-1}). Montrer que $h_{I,k} \circ h_{J,k^{-1}}$ est une translation de vecteur $(k-1)\overrightarrow{IJ}$. On admettra que les applications affines dont la partie linéaire est l'identité sont des translations.

Le problème. – (10 pts) On note E un espace affine de dimension deux ou trois et $\overrightarrow{E}$ sa direction.

Première partie : les involutions linéaires.– On note $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \longrightarrow \overrightarrow{E}$ une application linéaire *involutive* c'est-à-dire telle que $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{id}$. On pose

$\overrightarrow{G} = \ker(\overrightarrow{f} + \overrightarrow{id})$ et $\overrightarrow{F} = \ker(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id})$.

1) i) Montrer que $\overrightarrow{G} \cap \overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{0}\}$.

2) i) Montrer que $(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id}) \circ (\overrightarrow{f} + \overrightarrow{id}) = (\overrightarrow{f} + \overrightarrow{id}) \circ (\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id}) = 0$.
ii) Soit $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$. On note

$$\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x}$$

Montrer que $\overrightarrow{x_1} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{x_2} \in \overrightarrow{G}$.

3) Montrer que $\overrightarrow{x}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{x_2}$ et en déduire que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$.

4) Est-il possible d'avoir $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F}$? Ou $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{G}$?

5) On décompose tout point $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$ en $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{G}$. Écrire $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$. Dans le cas où $\overrightarrow{E} \neq \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{E} \neq \overrightarrow{G}$ on dit $\overrightarrow{f}$ est la *symétrie vectorielle* par rapport à $\overrightarrow{F}$ et de direction $\overrightarrow{G}$.

Seconde partie : les symétries affines.– Soient $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ deux sous-espaces vectoriels non réduits à $\{0\}$ de $\overrightarrow{E}$ et tels que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$. On note F et G deux sous-espaces affines de E de directions $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$.

1) Soient I et J deux points quelconques tels que $I \in F$ et $J \in G$. On note $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ les composantes du vecteur $\overrightarrow{IJ}$ dans $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$, i. e. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{G}$. On pose $P = I + \overrightarrow{u} \in F$ et $Q = J - \overrightarrow{v} \in G$.
i) Montrer que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$ et en déduire que $F \cap G$ contient au moins un point.
ii) Montrer en raisonnant par l'absurde que $F \cap G$ ne contient qu'un point.

2) Soient M et N deux points de E. On note P (resp. Q) l'unique point d'intersection de F et de $M + \overrightarrow{G}$ (resp. de F et de $N + \overrightarrow{G}$).
i) Déterminer les composantes $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{G}$ de $\overrightarrow{MN}$ en fonction de M, N, P et Q.
ii) En déduire que $\overrightarrow{s}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{QN}$ où $\overrightarrow{s}$ est la symétrie vectorielle par rapport à $\overrightarrow{F}$ et de direction $\overrightarrow{G}$.

3) Si $M \in E$, on définit le symétrique de M par rapport à F et de direction $\overrightarrow{G}$ comme étant le point $M' = P + \overrightarrow{MP}$ où P est l'unique point d'intersection de F et de $G = M + \overrightarrow{G}$. Montrer que l'application s qui a tout point $M \in E$ associe son symétrique $M' = s(M)$ par rapport à F et de direction $\overrightarrow{G}$ est affine.

4) i) Soit $M \in F$. Montrer que $s(M) = M$ et en déduire que $F \subset Fix\ s$.
ii) Soit $M \in Fix\ s$. Montrer que $M \in F$ et déduire que $Fix\ s = F$.

5) Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine dont l'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est la symétrie vectorielle $\overrightarrow{s}$ par rapport à $\overrightarrow{F}$ et de direction $\overrightarrow{G}$. On veut montrer que f n'est pas nécessairement une symétrie affine.
i) Soient $O \in F$ et $O' = f(O)$. Montrer que pour tout $M \in E$ on a $f(M) = O' + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{OM})$
ii) Montrer que $M \in Fix\ f \iff 2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OO'}$.
iii) On suppose désormais que $O' \in F$ et que $O' \neq O$. Montrer que $Fix\ f = \emptyset$ et en déduire que f n'est pas une symétrie affine.
iv) Reconnaître f dans ce cas et donner son nom.