Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Corrigé du partiel du 28 septembre 2017

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

1.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine. Montrer que si $Fix\ f$ est non vide, alors c'est un sous-espace affine de E.

Rép.– Soit $A \in Fix\ f$ (qui est non vide). On va montrer que $\overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in Fix\ f\}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. Or

$$\begin{aligned}
\{\overrightarrow{AM} \mid M \in Fix\ f\} &= \{\overrightarrow{AM} \mid f(M) = M\} \\
&= \{\overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{AM}\} \\
&= \{\overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM}\} \qquad \text{car } f \text{ affine} \\
&= Ker\,(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{E}}).
\end{aligned}$$

2.– Soit $O \in E$. Montrer que tout élément $f \in GA(E)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $f = t \circ g$ où t est une translation et g un élément de $GA(E)$ qui fixe O.

Rép.– Soit $O' = f(O)$. On définit g en posant

$$g := t_{-\overrightarrow{OO'}} \circ f \qquad (*)$$

On a $g(O) = 0$ et g est composée de deux éléments de $GA(E)$, donc $g \in GA(E)$. Il suffit d'inverser $(*)$ pour obtenir $f = t \circ g$. Supposons $f = t_1 \circ g_1 = t_2 \circ g_2$ Ceci implique $t_1 \circ g_1(O) = t_2 \circ g_2(O)$ d'où $t_1(O) = t_2(O)$ et donc $t_1 = t_2$. Mais alors $g_1 = t_1^{-1} \circ f = t_2^{-1} \circ f = g_2$ d'où l'unicité de la décomposition.

3.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine bijective. Montrer que f^{-1} est affine.

Rép.– Soit $A \in E$. Pour tout $M \in E$, on définit une application affine $g : E \longrightarrow E$ par

$$g(M) := g(A') + (\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{A'M})$$

où $A' = f(A)$. Notons que f étant inversible, $\overrightarrow{f}$ est également inversible car s'il existait $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{E}$ tel que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = 0$ alors la formule de Grassmann impliquerait $f(A) = f(B)$ ce qui contredirait la bijectivité de f. Montrons que $f \circ g = id_E$ et $g \circ f = id_E$ ce qui montrera que $g = f^{-1}$ et donc que f^{-1} est affine. On a

$$\begin{array}{rcl} f \circ g(M) & = & f(g(A') + (\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{A'M})) \\ & = & f(g(A')) + \overrightarrow{f} \circ (\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{A'M}) \\ & = & A' + \overrightarrow{A'M} \\ & = & M \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} g \circ f(M) & = & g(f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM})) \\ & = & g(f(A)) + (\overrightarrow{f})^{-1} \circ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) \\ & = & A + \overrightarrow{AM} \\ & = & M \end{array}$$

4.– Soit g une application affine. On suppose que $g \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$. Montrer que $\overrightarrow{u} \in Ker(\overrightarrow{g} - \overrightarrow{id})$.

Rép.– La relation de conjugaison s'écrit $g \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ g^{-1} = t_{\overrightarrow{g}(\overrightarrow{u})}$ d'où $g \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{g}(\overrightarrow{u})} \circ g$. L'hypothèse $g \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$ implique donc $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ *i. e.* $\overrightarrow{u} \in Ker(\overrightarrow{g} - \overrightarrow{id})$.

5.– Soient $h_{I,k}$ (resp. $h_{J,k^{-1}}$) l'homothétie de centre $I \in E$ (resp. $J \in E$) et de rapport $k > 0$ (resp. k^{-1}). Montrer que $h_{I,k} \circ h_{J,k^{-1}}$ est une translation de vecteur $(k-1)\overrightarrow{IJ}$. On admettra que les applications affines dont la partie linéaire est l'identité sont des translations.

Rép.– La partie linéaire de $h_{I,k} \circ h_{J,k^{-1}}$ est une homothétie vectorielle de rapport $kk^{-1} = 1$, c'est donc l'identité. Ainsi $h_{I,k} \circ h_{J,k^{-1}}$ est une translation $t_{\overrightarrow{v}}$ avec $\overrightarrow{v} = JJ'$ où $J' = h_{I,k} \circ h_{J,k^{-1}}(J)$. Puisque $\overrightarrow{IJ'} = k\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IJ'} = (k-1)\overrightarrow{IJ}$.

Le problème. – (10 pts) On note E un espace affine de dimension deux ou trois et $\overrightarrow{E}$ sa direction.

Première partie : les involutions linéaires.– On note $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \longrightarrow \overrightarrow{E}$ une application linéaire *involutive* c'est-à-dire telle que $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{id}$. On pose $\overrightarrow{G} = \ker(\overrightarrow{f} + \overrightarrow{id})$ et $\overrightarrow{F} = \ker(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id})$.

1) i) Montrer que $\overrightarrow{G} \cap \overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{0}\}$.

Rép.– On a $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{G} \iff \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{F} \iff \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = -\overrightarrow{x}$. Donc $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{G} \cap \overrightarrow{F} \iff \overrightarrow{x} = -\overrightarrow{x} \iff \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

2) i) Montrer que $(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id}) \circ (\overrightarrow{f} + \overrightarrow{id}) = (\overrightarrow{f} + \overrightarrow{id}) \circ (\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id}) = 0$.
ii) Soit $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$. On note

$$\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x}$$

Montrer que $\overrightarrow{x_1} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{x_2} \in \overrightarrow{G}$.

Rép.– i) Il suffit de développer et d'utiliser la relation $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{id}$.
ii) D'après la question précédente on a

$$\overrightarrow{0} = (\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id}) \circ (\overrightarrow{f} + \overrightarrow{id})(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id})(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id})(\overrightarrow{x_1})$$

donc $\overrightarrow{x_1} \in \ker(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id}) = \overrightarrow{F}$. De même, l'évaluation de $(\overrightarrow{f} + \overrightarrow{id}) \circ (\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id})(\overrightarrow{x})$ montre que $\overrightarrow{x_2} \in \overrightarrow{G}$.

3) Montrer que $\overrightarrow{x}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{x_2}$ et en déduire que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$.

Rép.– On a $\overrightarrow{x} = \frac{1}{2}\overrightarrow{x_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{x_2}$, ainsi $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$. Comme on a établi précédemment que $\overrightarrow{G} \cap \overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{0}\}$, on en déduit $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$.

4) Est-il possible d'avoir $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F}$? Ou $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{G}$?

Rép.– Si $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F}$ cela signifie que $\overrightarrow{E} = \ker(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id})$ autrement dit que $\overrightarrow{f}$ est telle que pour tout point $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$, on a $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$. Une telle application existe et c'est l'identité : $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{id}$. Un raisonnement similaire montre que si $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{G}$ alors $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{id}$.

5) On décompose tout point $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$ en $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{G}$. Écrire $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$. Dans le cas où $\overrightarrow{E} \neq \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{E} \neq \overrightarrow{G}$ on dit $\overrightarrow{f}$ est la *symétrie vectorielle* par rapport à $\overrightarrow{F}$ et

de direction $\overrightarrow{G}$.

Rép.– i) Puisque $\overrightarrow{F} = \ker(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id})$ cela signifie que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$. De même $\overrightarrow{G} = \ker(\overrightarrow{f} + \overrightarrow{id})$ implique que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$. Ainsi $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

Seconde partie : les symétries affines.– Soient $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ deux sous-espaces vectoriels non réduits à $\{0\}$ de $\overrightarrow{E}$ et tels que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$. On note F et G deux sous-espaces affines de E de directions $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$.

1) Soient I et J deux points quelconques tels que $I \in F$ et $J \in G$. On note $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ les composantes du vecteur $\overrightarrow{IJ}$ dans $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$, i. e. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{G}$. On pose $P = I + \overrightarrow{u} \in F$ et $Q = J - \overrightarrow{v} \in G$.
i) Montrer que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$ et en déduire que $F \cap G$ contient au moins un point.
ii) Montrer en raisonnant par l'absurde que $F \cap G$ ne contient qu'un point.

Rép.– i) On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{(I + \overrightarrow{u})(J - \overrightarrow{v})} \\
&= \overrightarrow{(I + \overrightarrow{u})(I + \overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{v})} \\
&= \overrightarrow{(I + \overrightarrow{u})(I + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})} \\
&= \overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \\
&= \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

ainsi $P = Q$. Puisque $P \in F$ et $Q \in G$ cela signifie que $P = Q \in F \cap G$ et donc $F \cap G$ contient au moins un point.
ii) Supposons que $F \cap G$ contienne au moins deux points R et S distincts. Alors $\overrightarrow{RS} \in \overrightarrow{F}$ car $R \in F$ et $S \in F$. De même $\overrightarrow{RS} \in \overrightarrow{G}$ car $R \in G$ et $S \in G$. Donc $\overrightarrow{RS} \in \overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}$. Mais puisque $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ sont en somme directe $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G} = \{\overrightarrow{0}\}$ et donc $R = S$. Contradiction.

2) Soient M et N deux points de E. On note P (resp. Q) l'unique point d'intersection de F et de $M + \overrightarrow{G}$ (resp. de F et de $N + \overrightarrow{G}$).
i) Déterminer les composantes $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{G}$ de $\overrightarrow{MN}$ en fonction de M, N, P et Q.
ii) En déduire que $\overrightarrow{s}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{QN}$ où $\overrightarrow{s}$ est la symétrie vectorielle par rapport à $\overrightarrow{F}$ et de direction $\overrightarrow{G}$.

Rép.– i) On a

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{PQ} + (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QN}) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$$

avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QN} \in \overrightarrow{G}$.

ii) D'après la première partie, on a $\overrightarrow{s}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ ainsi

$$\overrightarrow{s}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{PQ} - (\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{QN}).$$

3) Si $M \in E$, on définit le symétrique de M par rapport à F et de direction $\overrightarrow{G}$ comme étant le point $M' = P+\overrightarrow{MP}$ où P est l'unique point d'intersection de F et de $G = M+\overrightarrow{G}$. Montrer que l'application s qui a tout point $M \in E$ associe son symétrique $M' = s(M)$ par rapport à F et de direction $\overrightarrow{G}$ est affine.

Rép.– Soient M et N deux points quelconques de E. On note $P = F \cap (M+\overrightarrow{G})$ et $Q = F \cap (N+\overrightarrow{G})$. On a

$$\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{s(M)s(N)} & = & \overrightarrow{(P+\overrightarrow{PM})(Q+\overrightarrow{QN})} \\
& = & \overrightarrow{(P+\overrightarrow{PM})(P+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QN})} \\
& = & \overrightarrow{(P+\overrightarrow{PM})(P+\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QN}-\overrightarrow{PM})} \\
& = & \overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QN}-\overrightarrow{PM} \\
& = & \overrightarrow{PQ}-(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{QN}).
\end{array}$$

Par conséquent $\overrightarrow{s(M)s(N)} = \overrightarrow{s}(\overrightarrow{MN})$ d'après la question précédente. Ainsi s est une application affine et son application linéaire associée est la symétrie vectorielle $\overrightarrow{s}$.

4) i) Soit $M \in F$. Montrer que $s(M) = M$ et en déduire que $F \subset Fix\ s$.
ii) Soit $M \in Fix\ s$. Montrer que $M \in F$ et déduire que $Fix\ s = F$.

Rép.– i) Soit $M \in F$. On a $M' = s(M) = P+\overrightarrow{MP}$ où $P = F \cap (M+\overrightarrow{G})$. Puisque $M \in M+\overrightarrow{G}$ on a nécessairement $P = M$ et donc $s(M) = M$. Par conséquent, tous les points de F sont fixes par s.
ii) Supposons que $s(M) = M$. Alors

$$M = P+\overrightarrow{MP} \iff \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP} \iff \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{0} \iff M = P$$

Puisque $P = F \cap (M+\overrightarrow{G}) \in F$ cela signifie que $M \in F$. Ainsi $F \subset Fix\ s$ et donc, d'après la question précédente, $Fix\ s = F$.

5) Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine dont l'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est la symétrie vectorielle $\overrightarrow{s}$ par rapport à $\overrightarrow{F}$ et de direction $\overrightarrow{G}$. On veut montrer que f n'est pas nécessairement une symétrie affine.
i) Soient $O \in F$ et $O' = f(O)$. Montrer que pour tout $M \in E$ on a $f(M) = O' + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{OM})$
ii) Montrer que $M \in Fix\ f \iff 2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OO'}$.

iii) On suppose désormais que $O' \in F$ et que $O' \neq O$. Montrer que $Fix\ f = \emptyset$ et en déduire que f n'est pas une symétrie affine.
iv) Reconnaître f dans ce cas et donner son nom.

Rép.– i) C'est la formule de Grassmann.
ii) On a

$$M \in Fix\ f \iff M = O' + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{OM}).$$

Or d'après la question 2) ii) $\overrightarrow{s}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{PM}$ ainsi

$$\begin{array}{rcl} M \in Fix\ f & \iff & M = O' + \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{PM} \\ & \iff & \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{PM} \\ & \iff & \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{PM} \\ & \iff & \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{PM} \\ & \iff & 2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OO'}. \end{array}$$

iii) Notons d'une part que le vecteur $\overrightarrow{OO'}$ est un vecteur non nul de $\overrightarrow{F}$ puisque $O \in F$, $O' \in F$ et $O' \neq O$. D'autre part, $\overrightarrow{PM}$ est un vecteur de $\overrightarrow{G}$ car $P \in M + \overrightarrow{G}$. Puisque $\overrightarrow{G} \cap \overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{0}\}$, l'équation $2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OO'}$ n'a pas de solution ce qui signifie que $Fix\ f = \emptyset$. Puisque l'ensemble des points fixes d'une symétrie affine est non vide (question 4), c'est que l'application f, si elle existe, n'est pas une symétrie affine.
iv) Soit s la symétrie affine par rapport à F et de direction $\overrightarrow{G}$. La formule de Grassmann permet d'écrire pour tout $M \in E$:

$$s(M) = O + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{OM})$$

puisque dans ce cas $s(O) = O$. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. On a

$$t \circ s(M) = t(O) + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{OM})$$

car $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{id}$. Ainsi $f = t \circ s$ satisfait à la relation$f(M) = O' + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{OM})$ pour tout $M \in E$. Une telle application s'appelle une symétrie glissée.