Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Corrigé du partiel du 27 septembre 2018

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

1.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine. Montrer que si $Fix\ f$ est non vide alors c'est un sous-espace affine de E.

Rép.– Soit $A \in Fix\ f$ (qui est non vide). On va montrer que $\overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in Fix\ f\}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. Or

$$\begin{array}{rcll} \{\overrightarrow{AM} \mid M \in Fix\ f\} & = & \{\overrightarrow{AM} \mid f(M) = M\} & \\ & = & \{\overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{AM}\} & \\ & = & \{\overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM}\} & \text{car } f \text{ affine} \\ & = & Ker\,(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{E}}). & \end{array}$$

2.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine inversible et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$. Montrer que $f \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ f^{-1} = t_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})}$.

Rép.– Soit M' un point de E et $M = f^{-1}(M')$. On a

$$f \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ f^{-1}(M') = f \circ t_{\overrightarrow{u}}(M) = f(M + \overrightarrow{u}) = f(M) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = M' + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$$

3.– Soient $O \in E$ et $f_1 = t_{\overrightarrow{u}_1} \circ g_1$, $f_2 = t_{\overrightarrow{u}_2} \circ g_2$ où g_1 et g_2 sont des éléments de $GA(E)$ qui fixent O. Montrer que

$$f_1 \circ f_2 = t_{\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{g_1}(\overrightarrow{u}_2)} \circ g_1 \circ g_2.$$

Rép.– Montrons d'abord que si $g : E \longrightarrow E$ une application affine inversible et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$ alors $g \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ g^{-1} = t_{\overrightarrow{g}(\overrightarrow{u})}$. En effet si M' un point de E et $M = g^{-1}(M')$ alors on a

$$g \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ g^{-1}(M') = g \circ t_{\overrightarrow{u}}(M) = g(M + \overrightarrow{u}) = g(M) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{u}) = M' + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{u}).$$

On en déduit que

$$f_1 \circ f_2 = t_{\overrightarrow{u}_1} \circ g_1 \circ t_{\overrightarrow{u}_2} \circ g_2 = t_{\overrightarrow{u}_1} \circ t_{\overrightarrow{g_1}(\overrightarrow{u}_2)} \circ g_1 \circ g_2 = t_{\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{g_1}(\overrightarrow{u}_2)} \circ g_1 \circ g_2.$$

4.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine. On suppose que $\overrightarrow{f} = kId$ avec $k \neq 1$ et $k \neq 0$. Montrer que f admet un unique point fixe I et en déduire que f est une homothétie de centre I et de rapport k.

Rép.– Soit $O \in E$ et $O' = f(O)$. Pour tout $M \in E$ on a (formule de Grassmann) :

$$M' = f(M) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = O' + k\overrightarrow{OM}.$$

Ainsi M est point fixe de f si et seulement si

$$M = O' + k\overrightarrow{OM} \iff \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + k\overrightarrow{OM} \iff \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OO'}}{1-k}$$

$$\iff M = O + \frac{\overrightarrow{OO'}}{1-k}$$

Par conséquent le point $I = O + \frac{\overrightarrow{OO'}}{1-k}$ est l'unique point fixe de f. La formule de Grassmann s'écrit alors

$$M' = f(M) = f(I) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{IM}) = I + k\overrightarrow{IM}$$

et f est une homothétie de centre I et de rapport k.

5.– Soient $h_{I,k}$ (resp. $h_{J,k'}$) l'homothétie de centre $I \in E$ (resp. $J \in E$) et de rapport $k > 0$ (resp. $k' > 0$). On suppose que $kk' \neq 1$. Montrer que $h_{I,k} \circ h_{J,k'}$ est une homothétie dont on déterminera le centre K en fonction de I, J, k et k'. On admettra que les applications affines dont la partie linéaire est kId avec $k \neq 1$ sont des homothéties de rapport k.

Rép.– La partie linéaire de $h_{I,k} \circ h_{J,k'}$ est une homothétie vectorielle de rapport $kk' \neq 1$, l'application affine $h_{I,k} \circ h_{J,k'}$ est donc une homothétie affine de rapport kk'. Soit K son centre. On a

$$\begin{array}{rcl}
K & = & h_{I,k}(h_{J,k'}(K)) \\
 & = & h_{I,k}(J + k'\overrightarrow{JK}) \\
 & = & h_{I,k}(J) + k'\overrightarrow{h_{I,k}}(\overrightarrow{JK}) \\
 & = & I + k\overrightarrow{IJ} + kk'\overrightarrow{JK} \\
 & = & I + k\overrightarrow{IJ} + kk'\overrightarrow{JI} + kk'\overrightarrow{IK} \\
 & = & I + k(1-k')\overrightarrow{IJ} + kk'\overrightarrow{IK}
\end{array}$$

d'où

$$(1 - kk')\overrightarrow{IK} = k(1-k')\overrightarrow{IJ}$$

et

$$K = I + \frac{k(1-k')}{1-kk'}\overrightarrow{IJ}.$$

Le problème. – (10 pts) On note E un espace affine de dimension deux ou trois et $\overrightarrow{E}$ sa direction.

1) Soient A, B, C, D quatre points deux à deux distincts de E. On note I, J, K, L les milieux respectifs de $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$, $[D, A]$.

i) Montrez que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

ii) Exprimer $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{JK}$ en fonction de A, B, C et D.

iii) En déduire la nature du polygone $IJKL$.

iv) Que se passerait-il si l'on avait $A = C$? Même question avec $A = B$?

Rép.– i) Puisque $I = Mil[AB]$ on a $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et similairement $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC})$ et $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Un calcul direct montre que

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

De la même manière, on trouve aussi que $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
ii) La décomposition $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AL}$ montre que $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. De même, on trouve $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
iii) L'égalité $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ montre que $IJKL$ est un parallélogramme qui est non plat car les points A, B, C, D étant distincts deux à deux on a $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{BD} \neq \overrightarrow{0}$.
iv) Les calculs effectués en i) et ii) restent valides que les points A, B, C et D soient distincts deux à deux ou non. Si $A = C$ le parallélogramme s'aplatit en le segment $[IL] = [JK]$. Si $A = B$, le sommet I du parallélogramme se confond avec les points A et B, mais le parallélogramme ne dégénère pas en un segment.

2) Soit I un point de E. On rappelle que la symétrie centrale de centre I est l'application $s_I : E \to E$ telle que pour tout point $M \in E$, on a

$$\overrightarrow{Is_I(M)} = -\overrightarrow{IM}.$$

i) Montrer que s_I est une application affine et expliciter son application linéaire associée.

ii) Montrer que s_I est bijective et déterminer son inverse.

Rép.– i) Soient $(M,N) \in E^2$, on a

$$\overrightarrow{s_I(M)s_I(N)} = \overrightarrow{s_I(M)I} + \overrightarrow{Is_I(N)} = \overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IN} = -\overrightarrow{MN}.$$

Ainsi s_I est affine et son application linéaire associée est $\overrightarrow{s_I} = -\overrightarrow{Id}$.
ii) Pour tout $M \in E$, on a

$$\overrightarrow{Is_I(s_I(M))} = -\overrightarrow{Is_I(M)} = \overrightarrow{IM}$$

ainsi $s_I \circ s_I = id$ et s_I est bijective d'inverse elle-même.

3) i) Soit s_I et s_J deux symétries centrales. Montrer que $s_I \circ s_J$ est une translation dont on déterminera le vecteur.
ii) Soit $IJKL$ un parallélogramme. Montrer que $s_I \circ s_J \circ s_K \circ s_L = id$

Rép.– i) Pour tout $M \in E$, on a

$$s_I(s_J(M)) = s_I(J - \overrightarrow{JM}) = s_I(J) - \overrightarrow{s_I}(\overrightarrow{JM}) = I - \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JM} = I + \overrightarrow{IM} + 2\overrightarrow{JI} = I + 2\overrightarrow{JI}.$$

Par conséquent $s_I \circ s_J$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{JI}$.
ii) D'après la question précédente on a

$$s_I \circ s_J = t_{2\overrightarrow{JI}} \quad \text{et} \quad s_K \circ s_L = t_{2\overrightarrow{LK}}$$

ainsi

$$s_I \circ s_J \circ s_K \circ s_L = t_{2\overrightarrow{JI}+2\overrightarrow{LK}}.$$

Puisque $IJKL$ est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$. Ainsi $2\overrightarrow{JI} + 2\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{0}$ et $s_I \circ s_J \circ s_K \circ s_L = id$.

4) On suppose toujours que $IJKL$ est un parallélogramme. Existe-t-il un quadrilatère $ABCD$ tel que I, J, K, L soient les milieux respectifs de $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$, $[D, A]$? Si oui, est-il unique ?
Indication.– Utiliser la question 3.ii.

Rép.– Soit A un point quelconque de E. On pose $B = s_I(A)$, $C = s_J(B)$, $D = s_K(C)$ et $P = s_L(D)$. Par construction, I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DP]$. Or $P = s_I \circ s_J \circ s_K \circ s_L(A)$. Puisque $s_I \circ s_J \circ s_K \circ s_L = id$, on en déduit $P = A$. Ainsi les points $ABCD$ conviennent. La solution n'est pas unique. Tout point A' différent de A, B, C et D conduira à une autre solution.

5) Soit n un entier et $B_1, ..., B_n$ des points de E. On dit que $B_1...B_n$ est un *polygone des milieux* s'il existe n points $A_1, ..., A_n$ de E tels que pour tout

$i \in \{1, ..., n\}$ on ait $B_i = Mil[A_i, A_{i+1}]$ (avec la convention $A_{n+1} = A_1$). Montrer que si $B_1...B_n$ est un polygone des milieux alors A_1 est point fixe de $s_{B_n} \circ ... \circ s_{B_1}$.

Rép.– Supposons que les points $A_1, ..., A_n$ existent. Puisque $B_i = Mil[A_i, A_{i+1}]$ si et seulement si $s_{B_i}(A_i) = A_{i+1}$, cela implique que

$$A_1 = s_{B_n} \circ ... \circ s_{B_1}(A_1).$$

6) On suppose dans cette question que $n = 2k$ est pair et que $k \geq 2$.

i) À quelle condition nécessaire et suffisante sur les B_i la composée $s_{B_n} \circ ... \circ s_{B_1}$ admet-elle au moins un point fixe ?

ii) On suppose que la condition du i) est satisfaite. Montrer que $B_1...B_n$ est un polygone des milieux.

iii) Le n-uplet de points $(A_1, ..., A_n)$ trouvé en ii) est-il unique ?

Rép.– i) D'après la question 3 on sait que

$$s_{B_{2i}} \circ s_{B_{2i-1}} = t_{2\overrightarrow{B_{2i-1}B_{2i}}}$$

Notons $\overrightarrow{w} = 2\sum_{i=1}^{k} \overrightarrow{B_{2i-1}B_{2i}}$. On a

$$s_{B_n} \circ ... \circ s_{B_1} = t_{\overrightarrow{w}}.$$

En particulier, $s_{B_n} \circ ... \circ s_{B_1}$ a un point fixe si et seulement si $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$. Sous cette condition, tous les points de E sont fixes, en particulier le point A_1.

ii) Soit A_1 un point quelconque de E. Le même raisonnement qu'en 4) montre que les points $A_{i+1} = s_{B_i} \circ ... \circ s_{B_1}(A_1)$, $i \in \{1, ..., n-1\}$ conviennent.

iii) La solution n'est pas unique. Tout point A'_1 distinct de $A_1, ..., A_n$ conduira à une autre solution.

7) On reprend les notations de la question 5) mais on suppose maintenant que $n = 2k + 1$ est impair avec $k \geq 3$.

i) Montrer que la composée $s_{B_n} \circ ... \circ s_{B_1}$ a un unique point fixe Ω et exprimer Ω en fonction de $B_1, ..., B_n$.

ii) Montrer que $s_{B_n} \circ ... \circ s_{B_1}$ est une symétrie centrale de centre Ω.

iii) Montrer que $B_1...B_n$ est (toujours) un polygone des milieux.

iv) Le n uplet de points $(A_1, ..., A_n)$ trouvé en iii) est-il unique ?

Rép.– i) On sait d'après les questions précédentes que

$$s_{B_{2k}} \circ ... \circ s_{B_1} = t_{\overrightarrow{w}}$$

où $\overrightarrow{w} = 2\sum_{i=1}^{k} \overrightarrow{B_{2i-1}B_{2i}}$. Ainsi

$$s_{B_{2k+1}} \circ s_{B_{2k}} \circ ... \circ s_{B_1} = s_{B_{2k+1}} \circ t_{\overrightarrow{w}}$$

et, pour tout $M \in E$, on a

$$s_{B_n} \circ ... \circ s_{B_1}(M) = s_{B_n}(M + \overrightarrow{w}) = s_{B_n}(M) + \overrightarrow{s}_{B_n}(\overrightarrow{w}) = B_n - \overrightarrow{B_nM} - \overrightarrow{w}.$$

Un point $M \in E$ est point fixe de $s_{B_n} \circ ... \circ s_{B_1}$ si et seulement si

$$B_n - \overrightarrow{B_nM} - \overrightarrow{w} = M \iff \overrightarrow{B_nM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{w}.$$

Cette équation a une unique solution que l'on note $\Omega := B_n - \frac{1}{2}\overrightarrow{w}$ ce qui montre que $Fix\ s_{B_n} \circ ... \circ s_{B_1} = \{\Omega\}$. Évidemment, on peut facilement écrire Ω au moyen des B_i :

$$\Omega = B_n + \sum_{i=1}^{k} \overrightarrow{B_{2i}B_{2i-1}}.$$

ii) On a établi précédemment que pour tout $M \in E$ on a :

$$s_{B_n} \circ ... \circ s_{B_1}(M) = B_n - \overrightarrow{B_nM} - \overrightarrow{w}$$

soit encore

$$\begin{aligned} s_{B_n} \circ ... \circ s_{B_1}(M) &= B_n - \overrightarrow{B_n\Omega} - \overrightarrow{\Omega M} - \overrightarrow{w} \\ &= B_n + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{w} - \overrightarrow{\Omega M} - \overrightarrow{w} \\ &= B_n - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{w} - \overrightarrow{\Omega M} \\ &= \Omega - \overrightarrow{\Omega M}. \end{aligned}$$

La composée $s_{B_n} \circ ... \circ s_{B_1}$ est donc la symétrie centrale s_Ω.
iii) D'après la question 5), le point A_1 doit être un point fixe de $s_{B_n} \circ ... \circ s_{B_1}$. Cela ne laisse pas le choix. Il faut $A_1 = \Omega$. Une fois ce point fixé, tout se déroule comme en 6.ii)
iv) Puisque A_1 doit nécessairement être Ω et que tous les autres points s'en déduisent, le n-uplet $(A_1, ..., A_n)$ est unique.