Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Partiel du 10 octobre 2019

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

1.– Si f et g sont deux applications affines, montrer que $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.

2.– Soient $F \subset E$ un sous-espace affine non vide et $f : E \longrightarrow H$ une application affine. Montrer que $f(F) \subset H$ est un sous-espace affine.

3.– Montrer que si $\overrightarrow{f} = kId$, $k \neq 1$, alors f est une homothétie dont on déterminera le rapport et le centre.

4.– Soit $O \in E$. Montrer que tout élément $f \in GA(E)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $f = t \circ g$ où t est une translation et g un élément de $GA(E)$ qui fixe O.

5.– Soient D et D' deux droites parallèles du plan et s_D, $s_{D'}$ les réflexions par rapport à ces droites. Déterminer $s_{D'} \circ s_D$.

Le problème. – (10 pts) On note E un espace affine de dimension deux et $\overrightarrow{E}$ sa direction. Le but de ce problème est d'étudier les applications $f : E \to E$ telle que $f \circ f = f$. De telles applications sont dites *idempotentes* d'ordre 2.

Première partie : applications idempotentes.– On note $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ un repère de E et (x, y) les coordonnées dans ce repère.

1) Soit $f : E \to E$ donnée dans le repère $\mathcal{R}$ par $f(x, y) = (|x|, |y|)$. Ceci

signifie que si $M = O + x\overrightarrow{e}_1 + y\overrightarrow{e}_2$ alors

$$f(M) = O + |x|\overrightarrow{e}_1 + |y|\overrightarrow{e}_2$$

a) Montrer que f est idempotente d'ordre 2.

b) Soit $\tilde{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ définie par $\tilde{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$. Montrer que $\tilde{f}(\overrightarrow{e}_1) = \overrightarrow{e}_1$ et que $\tilde{f}(-\overrightarrow{e}_1) = \overrightarrow{e}_1$.

c) L'application f est-elle affine ? Justifier.

2) Soit $f : E \to E$ donnée dans le repère $\mathcal{R}$ par $f(x, y) = (x, 1)$.

a) Montrer que f est idempotente d'ordre 2.

b) L'application f est-elle affine ? Justifier.

3) Soit $f : E \to E$ une application idempotente d'ordre 2 (non nécessairement affine). On note $Fix\ f = \{M \in E \mid f(M) = M\}$ et $Im\ f = \{N \in E \mid \exists M \in E, f(M) = N\}$.

a) Montrer que $Im\ f \subset Fix\ f$.

b) Montrer que $Fix\ f \subset Im\ f$ et en déduire que $Fix\ f = Im\ f$.

c) Montrer que f possède au moins un point fixe.

d) Montrer que si f admet un unique point fixe alors f est une application constante.

e) Une application $f : E \to E$ qui est constante est-elle affine ? Justifier.

SECONDE PARTIE : PROJECTIONS.– On suppose désormais que $f : E \to E$ une application à la fois affine et idempotente d'ordre 2.

4) Montrer que soit f est constante, soit f est l'identité sur E, soit $Im\ f$ est une droite de E.

5) Soit $\overrightarrow{f}$ l'application linéaire associée à f. Montrer que $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}$.

6) Montrer que $Ker\overrightarrow{f} \cap Im\overrightarrow{f} = \{\overrightarrow{0}\}$ et en déduire que $\overrightarrow{E} = Ker\overrightarrow{f} \oplus Im\overrightarrow{f}$.

7) On suppose dans cette question que $Im\ f$ est une droite et on choisit le repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ de telle façon que $Im\ \overrightarrow{f} = Vect(\overrightarrow{e}_1)$ et $Ker\ \overrightarrow{f} = Vect(\overrightarrow{e}_2)$.

a) Montrer que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_1) = \overrightarrow{e}_1$.

b) Écrire la matrice A de $\overrightarrow{f}$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$.

c) Reconnaître l'application $\overrightarrow{f}$.

d) Montrer que pour tout $M = O + x\overrightarrow{e}_1 + y\overrightarrow{e}_2 \in E$, l'application f s'écrit

$$f(M) = f(O) + x\overrightarrow{e}_1$$

8) Réciproquement, on considère une application affine $f : E \to E$ définie pour tout $M = O + x\overrightarrow{e}_1 + y\overrightarrow{e}_2$ par

$$f(M) = f(O) + x\overrightarrow{e}_1$$

(en particulier $\overrightarrow{f}(x\overrightarrow{e}_1 + y\overrightarrow{e}_2) = x\overrightarrow{e}_1$). Montrer que f est idempotente d'ordre 2 si et seulement si $f(O) \in O + Vect(\overrightarrow{e}_2)$.

9) Soient $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ deux sous espace vectoriels de $\overrightarrow{E}$ pas nécessairement de dimension 1 mais tels que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$ et on note

$$\begin{array}{cccc} \overrightarrow{p} : & \overrightarrow{E} & \longrightarrow & \overrightarrow{E} \\ & \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} & \longmapsto & \overrightarrow{u} \end{array}$$

la projection vectorielle sur $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$. On pose $F = O + \overrightarrow{F}$ et $G = O + \overrightarrow{G}$.

a) Soit $M \in E$. Montrer que le sous-espace affine $M + \overrightarrow{G}$ intersecte F en un point unique que l'on note M'.

b) On appelle *projection affine* sur F parallèlement à G l'application affine $f : E \to E$ qui à tout $M \in E$ associe le point M'. Montrer que f est affine et que son application linéaire associée est $\overrightarrow{p}$.

c) Montrer que l'ensemble des applications affines de E idempotentes de degré 2 est précisément l'ensemble des projections affines de E.