Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Corrigé du partiel du mercredi 17 novembre 2021 - durée 2h

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

1.– Soit $\overrightarrow{f}:\overrightarrow{E}\to\overrightarrow{E}$ une application orthogonale et $(\overrightarrow{e}_1,\cdots,\overrightarrow{e}_n)$ une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$. Montrer que $(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_1),\cdots,\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_n))$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$.

Rép.– Notons d'abord que $(\overrightarrow{e}_1,\cdots,\overrightarrow{e}_n)$ est une base orthonormée si et seulement si

$$\forall\, 1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n,\quad \langle\overrightarrow{e}_i,\overrightarrow{e}_j\rangle=\delta_{ij}.$$

Puisque $\overrightarrow{f}$ préserve le produit scalaire, on a

$$\forall 1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n,\quad \langle\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_i),\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_j)\rangle=\delta_{ij}.$$

Ainsi $(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_1),\cdots,\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_n))$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$.

2.– Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel orienté de dimension 2 et $\mathcal{B}=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ une base orthonormée directe de $\overrightarrow{E}$. On considère un élément $\overrightarrow{f}\in SO(\overrightarrow{E})$ et on note A sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Montrer qu'il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

(on admettra le résultat de la Q1).

Rép.– Puisque $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_1)$ est un vecteur unitaire de $\overrightarrow{E}$, il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_1)=\cos\theta\,\overrightarrow{e}_1+\sin\theta\,\overrightarrow{e}_2.$$

Puisque $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_2)$ est un vecteur unitaire, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_2) = \cos\alpha\,\overrightarrow{e}_1 + \sin\alpha\,\overrightarrow{e}_2.$$

Enfin la condition $\langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_1), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_2)\rangle = 0$ impose

$$\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta = 0$$

c'est-à-dire

$$\cos(\alpha - \theta) = 0.$$

Cette équation signifie que

$$\alpha = \theta + \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

et donc

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_2) = (-1)^k \left(-\sin\theta\,\overrightarrow{e}_1 + \cos\theta\,\overrightarrow{e}_2\right).$$

La base $(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_1)\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_2))$ est directe si k est pair et indirecte sinon. Il faut donc nécessairement que

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_2) = -\sin\theta\,\overrightarrow{e}_1 + \cos\theta\,\overrightarrow{e}_2.$$

3– Soit $f : E \to E$ une application affine. On suppose que $\overrightarrow{f} = k\overrightarrow{id}$ avec $k \neq 1$. Montrer que f a un unique point fixe.

Rép.– Soit O un point de E. La relation de Grassmann s'écrit

$$f(M) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}).$$

L'équation $f(M) = M$ est donc équivalente à

$$f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = M$$

Puisque $\overrightarrow{f} = k\overrightarrow{id}$, cette équation est équivalente à

$$f(O) + k\overrightarrow{OM} = M$$

soit encore

$$\overrightarrow{Of(O)} + k\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}$$

c'est-à-dire

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{Of(O)}}{1-k} \quad \Longleftrightarrow \quad M = O + \frac{\overrightarrow{Of(O)}}{1-k}.$$

Ainsi l'équation $f(M) = M$ admet une unique solution ce qui montre que f a un unique point fixe.

4.– Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $s_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $s_\theta(z) = e^{i\theta}\overline{z}$. Déterminez $Fix\, s_\theta$.

Rép.– On constate d'abord que $0 \in Fix\, s_\theta$. En effet $s_\theta(0) = e^{i\theta}\overline{0} = 0$. Pour trouver les éventuels autres points de $Fix\, s_\theta$, on résout dans $\mathbb{C}^*$ l'équation des points fixes en posant $z = \rho e^{i\varphi}$ $(\rho \neq 0)$:

$$\begin{aligned} s_\theta(z) = z &\iff e^{i\theta}\overline{z} = z \\ &\iff e^{i\theta}\rho e^{-i\varphi} = \rho e^{i\varphi} \\ &\iff e^{i(\theta-\varphi)} = e^{i\varphi} \\ &\iff e^{i(\theta-2\varphi)} = 1 \\ &\iff \theta - 2\varphi \equiv 0\ [2\pi] \\ &\iff \varphi \equiv \frac{\theta}{2}\ [\pi]. \end{aligned}$$

Ainsi

$$z \in Fix\, s_\theta \cap \mathbb{C}^* \iff z = \rho e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{ou} \quad z = \rho e^{-i\frac{\theta}{2}}, \rho \in \mathbb{R}^*$$

Notons que $\rho = 0$ correspond au point 0. Ainsi

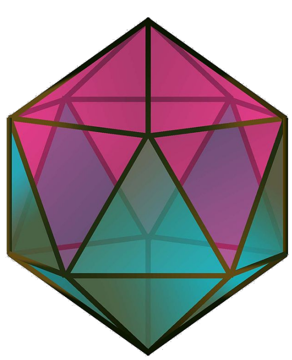
$$Fix\, s_\theta = \{\rho e^{i\frac{\theta}{2}} \mid \rho \in \mathbb{R}\}$$

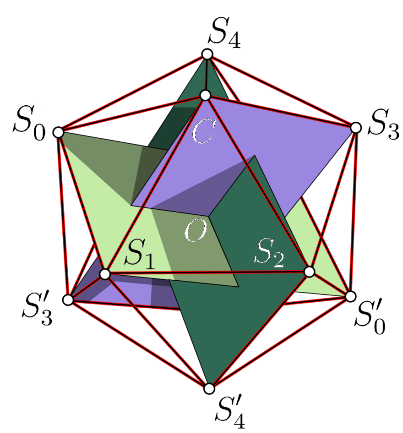
est la droite affine passant par l'origine et faisant un angle $\frac{\theta}{2}$ par rapport à l'horizontale.

5.– Donner l'énoncé exact du lemme d'adjonction d'un point fixe (on ne demande pas la démonstration).

Rép.– Soit $f : E \to E$ une isométrie et $F = Fix\, f$. On considère un point $A \in E \setminus F$, on note A' son image par f, H l'hyperplan médiateur du segment $[AA']$ et s_H la réflexion hyperplane par rapport à H. Alors le sous-espace affine des points fixes de l'application $g = s_H \circ f$ contient A et F.

Le problème. – (10 pts) Le but de ce problème est d'étudier les propriétés géométriques de l'icosaèdre





Décomposition de l'icosaèdre $I = I_+ \cup I_-$ (à gauche), notations des sommets (à droite)

Un formulaire trigonométrique est disponible en fin de sujet

Une question préliminaire.– Soit $n \geq 1$ et $k \in \{0, ..., n-1\}$. On note $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ la k-ème racine n-ème de l'unité.

1) Montrer que

$$\omega_{k+1} + \omega_k = 2\cos\frac{\pi}{n}\, e^{i\frac{2k+1}{n}\pi}$$

Rép.– Notons $\theta_k = \frac{2k\pi}{n}$ et écrivons

$$\begin{aligned} e^{i\theta_{k+1}} + e^{i\theta_k} &= e^{i\frac{\theta_{k+1}+\theta_k}{2}}\left(e^{i\frac{\theta_{k+1}-\theta_k}{2}} + e^{-i\frac{\theta_{k+1}-\theta_k}{2}}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\theta_{k+1}-\theta_k}{2}\right) e^{i\frac{\theta_{k+1}+\theta_k}{2}} \end{aligned}.$$

Or

$$\frac{\theta_{k+1}+\theta_k}{2} = \frac{2k+1}{n} \quad \text{et} \quad \frac{\theta_{k+1}+\theta_k}{2} = \frac{\pi}{n}$$

d'où le résultat.

Première partie : voisinage d'un sommet.– On note $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ le repère standard de $\mathbb{R}^3$. On considère le point $C = O + \overrightarrow{e_3}$ et pour tout $k \in \{0, 1, ..., 4\}$ les points

$$S_k = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\frac{2k\pi}{5}, \frac{2}{\sqrt{5}}\sin\frac{2k\pi}{5}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Dans la suite, on adopte une convention circulaire pour l'indice k, l'écriture S_5 signifie S_0, S_6 signifie S_1, etc. On donne également les valeurs

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad \text{et} \quad \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

2) Montrer que le triangle T_0 de sommets S_0, S_1 et C est équilatéral.

Rép.– Notons que

$$S_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{et} \quad S_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\frac{2\pi}{5}, \frac{2}{\sqrt{5}}\sin\frac{2\pi}{5}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

On a

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{CS_0}\|^2 &= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - 1\right)^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{5}. \\
\|\overrightarrow{CS_1}\|^2 &= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\frac{2\pi}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - 1\right)^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{5}. \\
\|\overrightarrow{S_0S_1}\|^2 &= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\frac{2\pi}{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\frac{2\pi}{5}\right)^2 = \frac{8}{5}\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)
\end{aligned}$$

et avec la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$ donnée dans l'énoncé on obtient

$$\|\overrightarrow{S_0S_1}\|^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{5}.$$

Il s'en suit que le triangle CS_0S_1 est équilatéral.

3) Soit r l'application de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$r(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\cos\frac{2\pi}{5} - y\sin\frac{2\pi}{5} \\ x\sin\frac{2\pi}{5} + y\cos\frac{2\pi}{5} \\ z \end{pmatrix}$$

a) Montrer que r est affine.
b) Montrer que r est une isométrie.
c) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $r^n = r \circ r^{n-1}$ et on convient que $r^0 = id$. Montrer que

$$r^n(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\cos\frac{2n\pi}{5} - y\sin\frac{2n\pi}{5} \\ x\sin\frac{2n\pi}{5} + y\cos\frac{2n\pi}{5} \\ z \end{pmatrix}$$

d) En déduire que les triangles T_k, $k \in \{0, ..., 4\}$, de sommets $S_kS_{k+1}C$ sont tous équilatéraux et isométriques entre eux.

Rép.– a) Soient M et N de coordonnées (x,y,z) et (x',y',z'), on a

$$\overrightarrow{r(M)r(N)} = \begin{pmatrix} (x'-x)\cos\frac{2\pi}{5} - (y'-y)\sin\frac{2\pi}{5} \\ (x'-x)\sin\frac{2\pi}{5} + (y'-y)\cos\frac{2\pi}{5} \\ z'-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{5} & -\sin\frac{2\pi}{5} & 0 \\ \sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}$$

ainsi r est une application affine dont l'application linéaire associées $\vec{r}$ est la rotation vectorielle d'axe $Vect(\overrightarrow{e_3})$ et d'angle $\frac{2\pi}{5}$.

b) Un calcul direct montre que

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{r(M)r(N)}\|^2 &= \left((x'-x)\cos\frac{2\pi}{5}-(y'-y)\sin\frac{2\pi}{5}\right)^2+\left((x'-x)\sin\frac{2\pi}{5}+(y'-y)\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2 \\
&\quad +(z'-z)^2 \\
&= (x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2 \\
&= \|\overrightarrow{MN}\|^2
\end{aligned}$$

ainsi r est une isométrie.
c) On raisonne par récurrence. La propriété est trivialement vraie au rang 0. Supposons qu'elle soit vraie au rang n et calculons r^{n+1}

$$\begin{aligned}
r^{n+1}(x,y,z) &= r\circ r^n(x,y,z) \\
&= r(x\cos\frac{2n\pi}{5}-y\sin\frac{2n\pi}{5}, x\sin\frac{2n\pi}{5}+y\cos\frac{2n\pi}{5}, z)
\end{aligned}$$

Notons $(x',y',z')=r^{n+1}(x,y,z)$. On a trivialement $z'=z$. La composante x' a pour expression

$$\begin{aligned}
x' &= \cos\frac{2\pi}{5}\left(x\cos\frac{2n\pi}{5}-y\sin\frac{2n\pi}{5}\right)-\sin\frac{2\pi}{5}\left(x\sin\frac{2n\pi}{5}+y\cos\frac{2n\pi}{5}\right) \\
&= \left(\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2n\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{2n\pi}{5}\right)x-\left(\cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{2n\pi}{5}+\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2n\pi}{5}\right)y \\
&= x\cos\frac{2(n+1)\pi}{5}-y\sin\frac{2(n+1)\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Similairement, on montre que

$$y'=x\sin\frac{2(n+1)\pi}{5}+y\cos\frac{2(n+1)\pi}{5}.$$

d) On constate que $r(C)=C$ et $r(S_k)=S_{k+1}$ pour tout $k\in\{0,...,4\}$. Ainsi $T_1=r(T_0)$, $T_2=r(T_1)$ etc. et tous les triangles sont isométriques entre eux.

4) a) Soit $\Omega=(0,0,\frac{1}{\sqrt{5}})$. En s'appuyant sur la question préliminaire montrer que

$$\overrightarrow{\Omega S}_{k+1}+\overrightarrow{\Omega S}_k=-2\cos\frac{\pi}{5}\,\overrightarrow{\Omega S_{k+3}}.$$

b) Montrer ensuite que

$$\overrightarrow{OS}_{k+1}+\overrightarrow{OS}_k=-2\cos\frac{\pi}{5}\,\overrightarrow{CS_{k+3}}.$$

Suggestion.– On pourra penser à introduire un point intermédiaire.

Rép.– a) On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega S}_{k+1}+\overrightarrow{\Omega S}_k &= \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\cos\frac{2(k+1)\pi}{5},\sin\frac{2(k+1)\pi}{5},0\right)\\ &\quad+\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\cos\frac{2k\pi}{5},\sin\frac{2k\pi}{5},0\right)\end{aligned}$$

et d'après la question préliminaire appliquée à $n=5$ on obtient

$$\overrightarrow{\Omega S}_{k+1}+\overrightarrow{\Omega S}_k = \frac{2}{\sqrt{5}}.2\cos\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{5},\sin\frac{(2k+1)\pi}{5},0\right)$$

Calculons

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega S_{k+3}} &= \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\cos\frac{2(k+3)\pi}{5},\sin\frac{2(k+3)\pi}{5},0\right)\\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{5}+\pi\right),\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{5}+\pi\right),0\right)\\ &= -\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{5},\sin\frac{(2k+1)\pi}{5},0\right)\end{aligned}$$

On a donc

$$\overrightarrow{\Omega S}_{k+1}+\overrightarrow{\Omega S}_k=-2\cos\frac{\pi}{5}\,\overrightarrow{\Omega S_{k+3}}.$$

b) En introduisant le point Ω dans la relation demandée et en utilisant le résultat de la question a), on constate que la question est équivalente à montrer que

$$\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{O\Omega}=-2\cos\frac{\pi}{5}\,\overrightarrow{C\Omega}.$$

Puisque

$$\overrightarrow{O\Omega}=(0,0,\frac{1}{\sqrt{5}})\quad\text{et}\quad\overrightarrow{C\Omega}=(0,0,\frac{1}{\sqrt{5}}-1),$$

il suffit donc de montrer que

$$\frac{2}{\sqrt{5}}=-2\cos\frac{\pi}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-1\right).$$

Or

$$2\cos\frac{\pi}{5}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=2\frac{\sqrt{5}+1}{4}\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Seconde partie : construction de I_+.– Soit $k\in\{0,...,4\}$. On considère le plan affine Π_k engendré par les trois points O, S_k et S_{k+1} et s_k la réflexion affine selon ce plan. On note $S'_k=s_k(C)$ et $T'_k=s_k(T_k)$. La partie supérieure I_+ de l'icosaèdre est l'ensemble :

$$I_+=\bigcup_{i=0}^{4}(T_k\cup T'_k).$$

5) a) Montrer que pour tout k, $\|\overrightarrow{OS}_k\| = \|\overrightarrow{OS}_{k+1}\|$.

b) En déduire que $\overrightarrow{OS}_k + \overrightarrow{OS}_{k+1}$ et $\overrightarrow{OS}_{k+1} - \overrightarrow{OS}_k$ sont orthogonaux puis que $\overrightarrow{CS}_{k+3}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OS}_{k+1} - \overrightarrow{OS}_k$.

c) Montrer que $2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CS}_{k+3}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OS}_{k+1} - \overrightarrow{OS}_k$.

d) Montrer que $2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CS}_{k+3}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CS}_{k+3}$.

Rép.– a) On a

$$\|\overrightarrow{OS}_k\|^2 = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1.$$

b) Puisque $\|\overrightarrow{OS}_k\|^2 = \|\overrightarrow{OS}_{k+1}\|^2$ on a

$$0 = \|\overrightarrow{OS}_{k+1}\|^2 - \|\overrightarrow{OS}_k\|^2 = \langle \overrightarrow{OS}_k + \overrightarrow{OS}_{k+1}, \overrightarrow{OS}_{k+1} - \overrightarrow{OS}_k \rangle.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{OS}_k + \overrightarrow{OS}_{k+1}$ et $\overrightarrow{OS}_{k+1} - \overrightarrow{OS}_{k+1}$ sont donc orthogonaux. Puisque d'après la question 3b

$$\overrightarrow{CS_{k+3}} = -\frac{\overrightarrow{OS}_{k+1} + \overrightarrow{OS}_k}{2\cos\frac{\pi}{5}}$$

on obtient également que les vecteurs $\overrightarrow{CS_{k+3}}$ et $\overrightarrow{OS}_{k+1} - \overrightarrow{OS}_{k+1}$ sont donc orthogonaux.
c) On a

$$\langle 2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CS}_{k+3}, \overrightarrow{OS}_{k+1} - \overrightarrow{OS}_k \rangle = \langle 2\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}_{k+1} - \overrightarrow{OS}_k \rangle + \langle \overrightarrow{CS}_{k+3}, \overrightarrow{OS}_{k+1} - \overrightarrow{OS}_k \rangle.$$

D'une part, d'après la question précédente on a

$$\langle \overrightarrow{CS}_{k+3}, \overrightarrow{OS}_{k+1} - \overrightarrow{OS}_k \rangle = 0.$$

D'autre part, puisque

$$\overrightarrow{OC} = (0,0,1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OS}_{k+1} - \overrightarrow{OS}_k = (*,*,0)$$

on a également

$$\langle 2\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}_{k+1} - \overrightarrow{OS}_k \rangle = 0.$$

d) On écrit

$$\langle 2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CS}_{k+3}, \overrightarrow{CS}_{k+3} \rangle = \langle 2\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CS}_{k+3} \rangle + \|\overrightarrow{CS}_{k+3}\|^2.$$

Puisque

$$\overrightarrow{CS}_{k+3} = (*,*,\frac{1}{\sqrt{5}} - 1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OC} = (0,0,1)$$

on a directement

$$\langle 2\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CS}_{k+3} \rangle = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}.$$

La longueur $\|\overrightarrow{CS}_{k+3}\|$ est celle d'une arête de T_{k+3}. Comme tous les triangles T_k sont isométriques, cette longueur c'est aussi celle de l'arête CS_0 qui a été calculée en début de problème :

$$\|\overrightarrow{CS}_{k+3}\|^2 = \|\overrightarrow{CS}_0\|^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{5}.$$

Finalement

$$\langle 2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CS}_{k+3}, \overrightarrow{CS}_{k+3}\rangle \quad = \quad \frac{2-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{10-2\sqrt{5}}{5}.$$

ce qui, une fois simplifié, vaut zéro.

6) On note $\mathcal{B}_k$ la base orthogonale

$$(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = (\overrightarrow{CS}_{k+3}, \overrightarrow{OS}_{k+1} - \overrightarrow{OS}_k, 2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CS}_{k+3}).$$

a) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{OC}$ dans la base $\mathcal{B}_k$.
b) Écrire la matrice de $\overrightarrow{s_k}$ dans la base $\mathcal{B}_k$.
c) Montrer que $s_k(C) = O - \overrightarrow{OS}_{k+3}$.
d) Soit σ l'application affine définie par

$$\sigma(M) = O - \overrightarrow{OM}$$

pour tout point M de l'espace. Reconnaître σ.
e) Montrer que $S'_k = \sigma(S_{k+3})$.

Rép.– a) De

$$\overrightarrow{v}_3 = 2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CS}_{k+3} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{CS}_{k+3}$$

on déduit immédiatement

$$\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{v}_1 + \frac{1}{2}\overrightarrow{v}_3.$$

b) Puisque

$$\overrightarrow{v}_1 = -\frac{\overrightarrow{OS}_{k+1} + \overrightarrow{OS}_k}{2\cos\frac{\pi}{5}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{OS}_{k+1} - \overrightarrow{OS}_k$$

les vecteurs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ engendrent $\overrightarrow{\Pi}_k = Vect(\overrightarrow{OS}_k, \overrightarrow{OS}_{k+1})$. Le vecteur $\overrightarrow{v}_3$ est lui normal au plan $\overrightarrow{\Pi}_k$. On a donc

$$Mat_{\mathcal{B}_k}(\overrightarrow{s_k}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) On a

$$\begin{aligned}
\vec{s_k}(\overrightarrow{OC}) &= \vec{s_k}\left(-\frac{1}{2}\vec{v}_1+\frac{1}{2}\vec{v}_3\right)\\
&= -\frac{1}{2}\vec{v}_1-\frac{1}{2}\vec{v}_3\\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{CS}_{k+3}-\frac{1}{2}(2\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CS}_{k+3})\\
&= -\overrightarrow{CS}_{k+3}-\overrightarrow{OC}\\
&= -\overrightarrow{OS}_{k+3}
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Grassman, on obtient

$$s_k(C)=s_k(O)+\vec{s_k}(\overrightarrow{OC})=O-\overrightarrow{OS}_{k+3}$$

car $O\in\Pi_k$.

d) L'application σ est une homothétie affine de centre O et de rapport -1. C'est donc également une symétrie centrale de centre O.

e) De $\sigma(S_{k+3})=O-\overrightarrow{OS}_{k+3}$ on déduit $s_k(C)=\sigma(S_{k+3})$ et donc $S'_k=\sigma(S_{k+3})$.

Troisième partie : propriétés géométriques de I.– On note $C'=\sigma(C)$ puis I_- l'image par σ de I_+ et on pose

$$I=I_+\cup I_-.$$

7) Montrer que l'ensenble des sommets de I est inclus dans une sphère de centre O et de rayon OC.

Rép.– D'après la question 5a) on a déjà

$$OC=OS_0=\cdots=OS_4.$$

Puisque σ est une isométrie et que $\sigma(O)=O$ on a

$$OS'_k=\sigma(O)\sigma(S_{k+3})=OS_{k+3}$$

donc

$$OC=OS'_0=\cdots=OS'_4.$$

Enfin $C'=\sigma(C)$ et

$$OC'=\sigma(O)\sigma(C)=OC.$$

Ceci montre que les 12 sommets de I sont inscrits dans une sphère de centre O et de rayon OC.

8) Pour tout $k \in \{0, ..., 4\}$, on considère l'application affine $f_k = \sigma \circ s_k$.

a) Écrire la matrice de $\overrightarrow{f}_k$ dans la base $\mathcal{B}_k$.

b) Montrer que f_k est un retournement dont l'axe est dirigé par $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OS_{k+3}}$ et passe par le point O.

c) Montrer que $f_k(C) = S_{k+3}$.

d) Déterminer le point $f_k(S_{k+3})$.

e) En déduire que f_k laisse invariant le plan affine engendré par O, C et S_{k+3}.

f) Montrer que f_k laisse également invariant le plan affine engendré par O, S_k, S_{k+1}.

Rép.– a) On a

$$Mat_{\mathcal{B}_k}(\overrightarrow{s_k}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Mat_{\mathcal{B}_k}(\overrightarrow{\sigma}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$Mat_{\mathcal{B}_k}(\overrightarrow{f_k}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\overrightarrow{f_k}$ est un retournement d'axe $\overrightarrow{v}_3 = 2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CS}_{k+3}$. Or

$$2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CS}_{k+3} = 2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OS}_{k+3} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OS}_{k+3}.$$

b) Puisque $f_k(O) = O$ on en déduit que f_k est un retournement d'axe

$$O + Vect(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OS}_{k+3}).$$

c) Constatons d'abord que

$$f_k(C) = \sigma(s_k(C)) = \sigma(S'_k)$$

or $S'_k = \sigma(S_{k+3})$ donc

$$f_k(C) = \sigma \circ \sigma(S_{k+3}) = S_{k+3}$$

car $\sigma \circ \sigma = id$.

d) Puisque f_k est un retournement, $f_k \circ f_k = id$. Ainsi

$$f_k(C) = S_{k+3} \quad \Longrightarrow \quad f_k \circ f_k(C) = f_k(S_{k+3}) \quad \Longrightarrow \quad C = f_k(S_{k+3}).$$

e) L'image par l'application affine f_k du plan affine engendré par O, C, S_{k+3} est le plan affine engendré par $f_k(O), f_k(C), f_k(S_{k+3})$. D'après les questions précédentes c'est le plan affine engendré par (O, S_{k+3}, C), autrement dit, le plan initial.

f) On a $f_k(O) = O$ et

$$f_k(S_k) = \sigma \circ s_k(S_k) = \sigma(S_k) = O - \overrightarrow{OS_k}$$

et

$$f_k(S_{k+1}) = \sigma \circ s_k(S_{k+1}) = \sigma(S_{k+1}) = O - \overrightarrow{OS_{k+1}}.$$

Le plan affine engendré par (O, S_k, S_{k+1}) est

$$O + Vect(\overrightarrow{OS}_k, \overrightarrow{OS}_{k+1}).$$

Celui engendré par $(f_k(O), f_k(S_k), f_k(S_{k+1})$ est

$$O + Vect(-\overrightarrow{OS}_k, -\overrightarrow{OS}_{k+1}).$$

Les deux plans sont donc confondus.

FORMULAIRE TRIGONOMÉTRIQUE.–

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2} \\
\cos p - \cos q &= -2\sin\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2} \\
\sin p + \sin q &= 2\sin\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2} \\
\sin p - \sin q &= 2\sin\tfrac{p-q}{2}\cos\tfrac{p+q}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b \\
\cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a\cos b + \sin b\cos a \\
\sin(a-b) &= \sin a\cos b - \sin b\cos a
\end{aligned}$$