Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Partiel du vendredi 21 octobre 2022 - durée 2h

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

1.– Soit $f : E \to E$ une application affine bijective et $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ son application linéaire associée. Montrer que $\overrightarrow{f}$ est bijective.

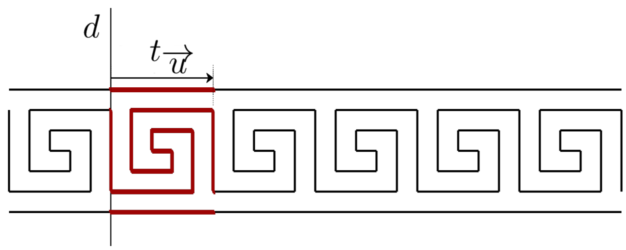
2.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine. Montrer que si $Fix\ f$ est non vide alors c'est un sous-espace affine de E.

3.– Soient s_{Δ_1} et s_{Δ_2} deux réflexions. Décrire $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$ selon que Δ_1 et Δ_2 sont parallèles ou non (on ne demande pas la démonstration).

4.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une isométrie, $F = Fix\ f$, $A \in E \setminus F$, $A' = f(A)$, H l'hyperplan médiateur de $[A, A']$ et s_H la réflexion hyperplane d'hyperplan H. Montrer que $Fix\ g$ où $g = s_H \circ f$ contient F et A.

5.– Soient $h_{I,k}$ (resp. $h_{J,k'}$) l'homothétie de centre $I \in E$ (resp. $J \in E$) et de rapport $k > 0$ (resp. $k' > 0$). On suppose que $kk' \neq 1$. Montrer que $h_{I,k} \circ h_{J,k'}$ est une homothétie dont on déterminera le centre K en fonction de I, J, k et k'. On admettra que les applications affines dont la partie linéaire est kId avec $k \neq 1$ sont des homothéties de rapport k.

Le problème. – (10 pts) Le but de ce problème est l'étude des frises du plan [1].



Un exemple de frise, son motif apparaît en gras.

Première partie : Groupe de translations d'une figure.– Soit P le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormée $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ et $F \subset P$ un sous-ensemble non vide de P. On note

$$\mathcal{T} = \{t_{\overrightarrow{u}} \mid \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}\}$$

le groupe des translations du plan et

$$\mathcal{T}(F) = \{t_{\overrightarrow{u}} \in \mathcal{T} \mid t_{\overrightarrow{u}}(F) = F\}$$

l'ensemble [2] des translations laissant F invariant.

1) Déterminer $\mathcal{T}(F)$ dans les cas suivants
  i) $F = \{p\}$ où p est un point de P.
  ii) $F = P$.
  iii) $F = D$ où D est la droite affine de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et passant par $p \in P$.

2) On rappelle que la partie entière d'un nombre réel x, notée $E(x)$, est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. Par exemple $E(1,5) = 1$, $E(-0,5) = -1$, $E(1) = 1$. Pour tout x, cette fonction vérifie l'équation

$$E(x+1) = E(x) + 1.$$

  i) Dessiner avec soin le graphe $G \subset P$ de la fonction E :

$$G = \{(x, E(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

1. Ce problème est extrait du document *Frises du plan* d'Arnaud Rougirel.
2. Cet ensemble est en réalité un groupe. Démontrez-le chez vous en guise d'exercice. Ce n'est pas demandé dans ce devoir.

Dans cette écriture, les coordonnées $(x, E(x))$ sont données dans le repère $\mathcal{R}$ et correspondent donc au point $O + x\overrightarrow{e} + E(x)\overrightarrow{e}_2$.

ii) Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur de coordonnées $(1, 1)$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$, autrement dit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2$. Montrer que $t_{\overrightarrow{u}}(G) \subset G$.

iii) Montrer que $t_{\overrightarrow{-u}}(G) \subset G$ et en déduire que $t_{\overrightarrow{u}}(G) = G$.

iv) Montrer que $t_{k\overrightarrow{u}} \in \mathcal{T}(G)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

v) Soit $\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{e}_1 + v_2\overrightarrow{e}_2$. On suppose que $t_{\overrightarrow{v}}(G) = G$. Montrer en considérant le point $(0, 0) \in G$ que $v_2 \in \mathbb{Z}$ et que $v_2 \leq v_1$.

vi) Sous les hypothèses de la question précédente, montrer en considerant le point $(-v_1, E(-v_1)) \in G$ que $-v_2 \leq -v_1$.

vii) Déduire des questions précédentes que $\overrightarrow{v} = v_2\overrightarrow{u}$, $v_2 \in \mathbb{Z}$, et que $\mathcal{T}(G) = \{t_{k\overrightarrow{u}} \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Seconde partie : Frises.– On dit que $F \subset P$ est une *frise* s'il existe un vecteur non nul $\overrightarrow{u} \in P$ tel que

$$\mathcal{T}(F) = \{t_{k\overrightarrow{u}} \,|\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

On précise parfois directement un générateur de $\mathcal{T}(F)$ en parlant de *frise de vecteur* $\overrightarrow{u}$. La question 2 montre que le graphe G de la fonction entière E est une frise de vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2$. Aucun des trois ensembles traités en question 1 n'est une frise.

3) i) Soit $f : P \to P$ une application affine. Montrer que

$$t_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})} \circ f = f \circ t_{\overrightarrow{v}}.$$

ii) On suppose maintenant que f est inversible. Montrer qu'il en est de même pour $\overrightarrow{f}$.

4) Soit F une frise de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $f : P \to P$ une application affine inversible.

i) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $t_{k\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})} \in \mathcal{T}(f(F))$.

ii) Réciproquement, montrer que si $t_{\overrightarrow{v}} \in \mathcal{T}(f(F))$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$. *Suggestion.–* On pourra utiliser l'inversibilité de f.

iii) Montrer que $f(F)$ est une frise de vecteur $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$.

Troisième partie : Motif d'une frise.– Soit F une frise de vecteur $\overrightarrow{u}$ et d une droite telle que $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{u}$ soient perpendiculaires. Une partie $\mathcal{M} \subset F$ de la forme

$$\mathcal{M} = F \cap \{N + \lambda\overrightarrow{u} \mid N \in d,\, \lambda \in [0,1]\}$$

est appelé un *motif* de F.

5) Donner, sans justification, un motif du graphe G de la fonction entière E. Le dessiner.

6) Soit $\Omega \in d$. On considère le repère $\widetilde{\mathcal{R}} = (\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_d})$ où $\overrightarrow{v_d}$ est un vecteur directeur de d. Si $M \in P$ est un point quelconque, on note (X, Y) ses coordonnées dans ce repère :

$$M = \Omega + X\overrightarrow{u} + Y\overrightarrow{v_d}.$$

i) Donner une équation paramétrique de d et en déduire une équation cartésienne de d dans le repère $\widetilde{\mathcal{R}}$.

ii) On considère la projection orthogonale $proj : P \to P$ sur la droite d. Soit $M \in P$ un point quelconque de coordonnées (X, Y). Déterminer les coordonnées (X', Y') du projeté $M' = proj(M)$. On rappelle que M' est caractérisé par le fait que $M' \in d$ et que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{v_d}$ sont perpendiculaires.

7) Soit $\mathcal{M}$ un motif d'une frise F de vecteur $\overrightarrow{u}$.

i) Montrer que

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} t_{k\overrightarrow{u}}(\mathcal{M}) \subset F.$$

ii) Soit $M \in F$ et $M' = proj(M)$ son projeté orthogonal sur d. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in [0, 1[$ tels que

$$\overrightarrow{M'M} = (k + \lambda)\overrightarrow{u}.$$

iii) On pose $M_\lambda = M' + \lambda\overrightarrow{u}$. Montrer que $M = t_{k\overrightarrow{u}}(M_\lambda)$.

vi) En déduire $M_\lambda \in F$ puis que $M_\lambda \in \mathcal{M}$.

v) Montrer que

$$F = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} t_{k\overrightarrow{u}}(\mathcal{M}).$$